

Objectif « chapeau » de l'UE

Etre capable d'établir le modèle linéaire d'un système monovariante, d'en analyser les performances et de synthétiser un correcteur analogique / un filtre numérique répondant à un cahier des charges donné.

Compétences requises pour suivre l'UE

Etre capable de :

- Faire des additions et des multiplications
- Manipuler des fractions
- Calculer la limite d'une fonction
- Calculer le module et l'argument d'un nombre complexe
- Manipuler des fonctions à valeurs complexes
- Calculer une intégrale "simple"
- Manipuler les fonctions exponentielle et logarithme de base 10

$$\log_{10}(10) = 1$$

Compétences requises pour suivre l'UE

Etre capable de :

- Calculer la transformée de Laplace d'une fonction ✔ ✘
- Calculer la transformée de Laplace inverse d'une fonction ✔ ✘
- Décomposer une fonction en éléments simples ✔ ✘
- Tracer le diagramme de Bode asymptotique des fonctions élémentaires

$$H(j\omega) = \pm j \frac{\omega}{\omega_0} \quad H(j\omega) = 1 \pm j \frac{\omega}{\omega_0} \quad H(j\omega) = \frac{1}{1 \pm j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{✔ ✘}$$



S'inscrire au cours de soutien « Outils du Génie Electrique »
Etre attentif en UE « OSI » (Mathématiques pour l'Ingénieur)

Plan de l'UE

Introduction générale

Modélisation des systèmes monovariabiles (Chap. 1)

Quantification des performances des systèmes bouclés (Chap. 2)

Synthèse de correcteurs à actions élémentaires (Chap. 3)

Synthèse de filtres numériques (Chap. 4 et Chap. 5)

Introduction générale

Définition de l'Automatique

L'**Automatique** est une science qui traite de la modélisation, de l'analyse, de l'identification et de la commande des systèmes dynamiques.

Sa problématique fondamentale est celle de la conception, de la mise en œuvre et de l'exploitation des moyens permettant de **maîtriser le comportement de systèmes complexes, naturels ou artificiels** selon un cahier des charges donné.

L'Automatique a pour fondements théoriques les mathématiques, la théorie du signal et l'informatique théorique.

Science des systèmes, elle s'appuie sur des concepts (rétroaction, modélisation, système dynamique, état, signal, optimalité, ...) dont l'application impacte fortement l'économie et l'environnement.

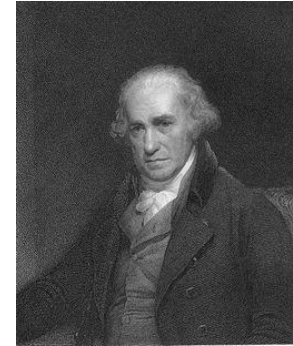


Science ayant un rôle de 1^{er} plan dans la transition énergétique de notre société

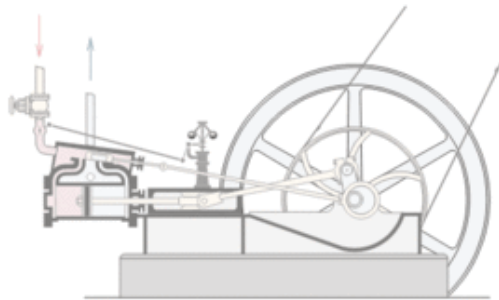
Historique

Quelques dates :

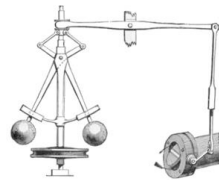
- 1769** : Machine à vapeur de J. Watt (1736-1819)
- 1922** : Régulateur PID par N. Minorsky (1885-1970)
- 1927** : Analyse d'amplificateurs par H. W. Bode (1905-1982)
- 1932** : Analyse de la stabilité par H. Nyquist (1889-1976)
- 1960** : Représentation d'état et contrôle optimal
- 1980** : Commande robuste
- 1987** : Commande prédictive généralisée



James Watt



Machine de J. Watt (1769)



Robot « Atlas » de Boston Dynamics (2019)

Aujourd'hui

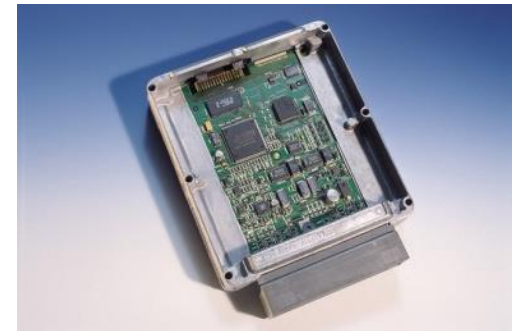
L'Automatique aujourd'hui :

Présente partout :

- énergie (nucléaire, hydraulique, éolien, solaire, ...),
- transport (terrestre, aéronautique , aérospatiale, ...),
- production industrielle (chaines de montage, de transformation, ...),
- ...

en raison surtout de l'apparition de l'électronique,
puis vers les années 60 :

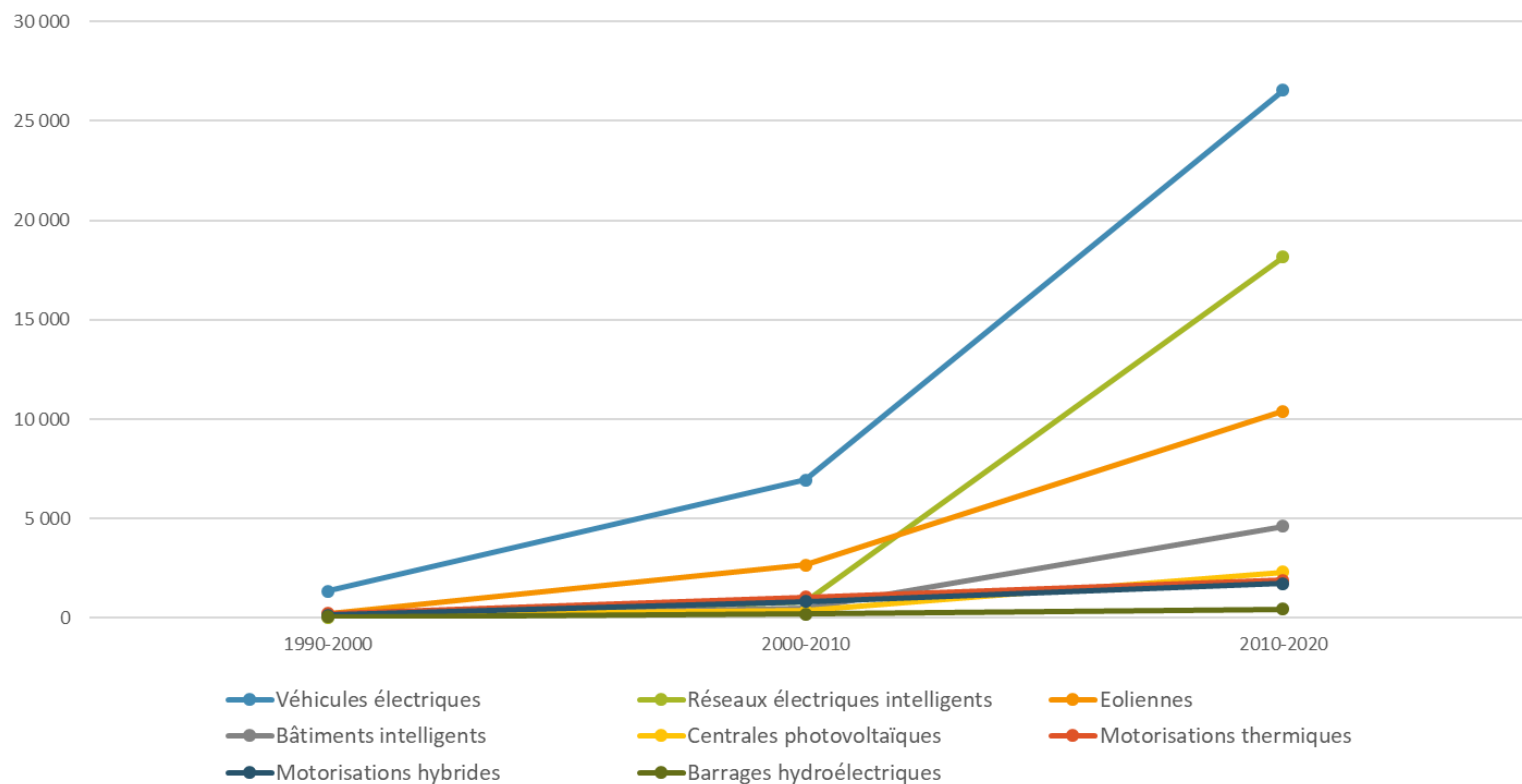
- du microprocesseur
- de l'informatique



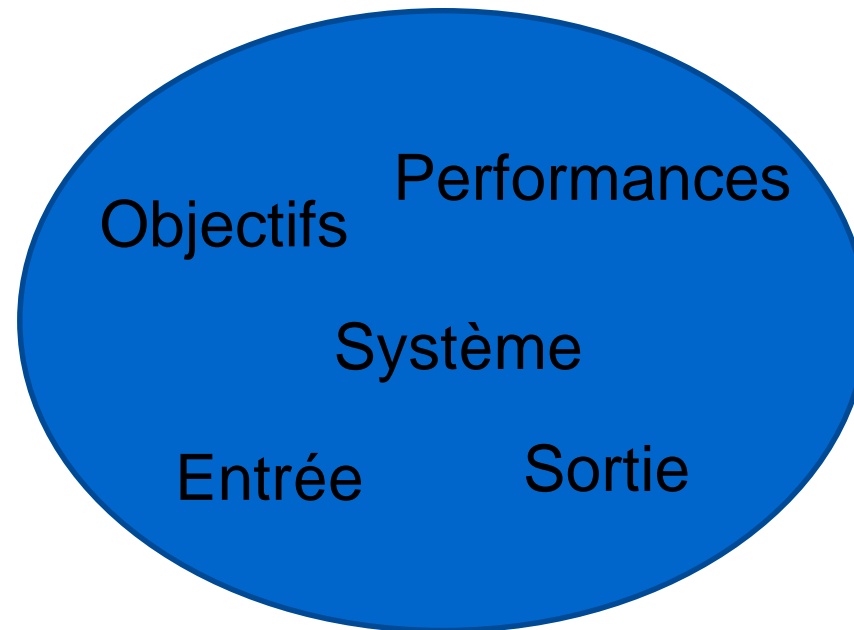
Science ayant un rôle-clé dans la transition énergétique et le développement durable

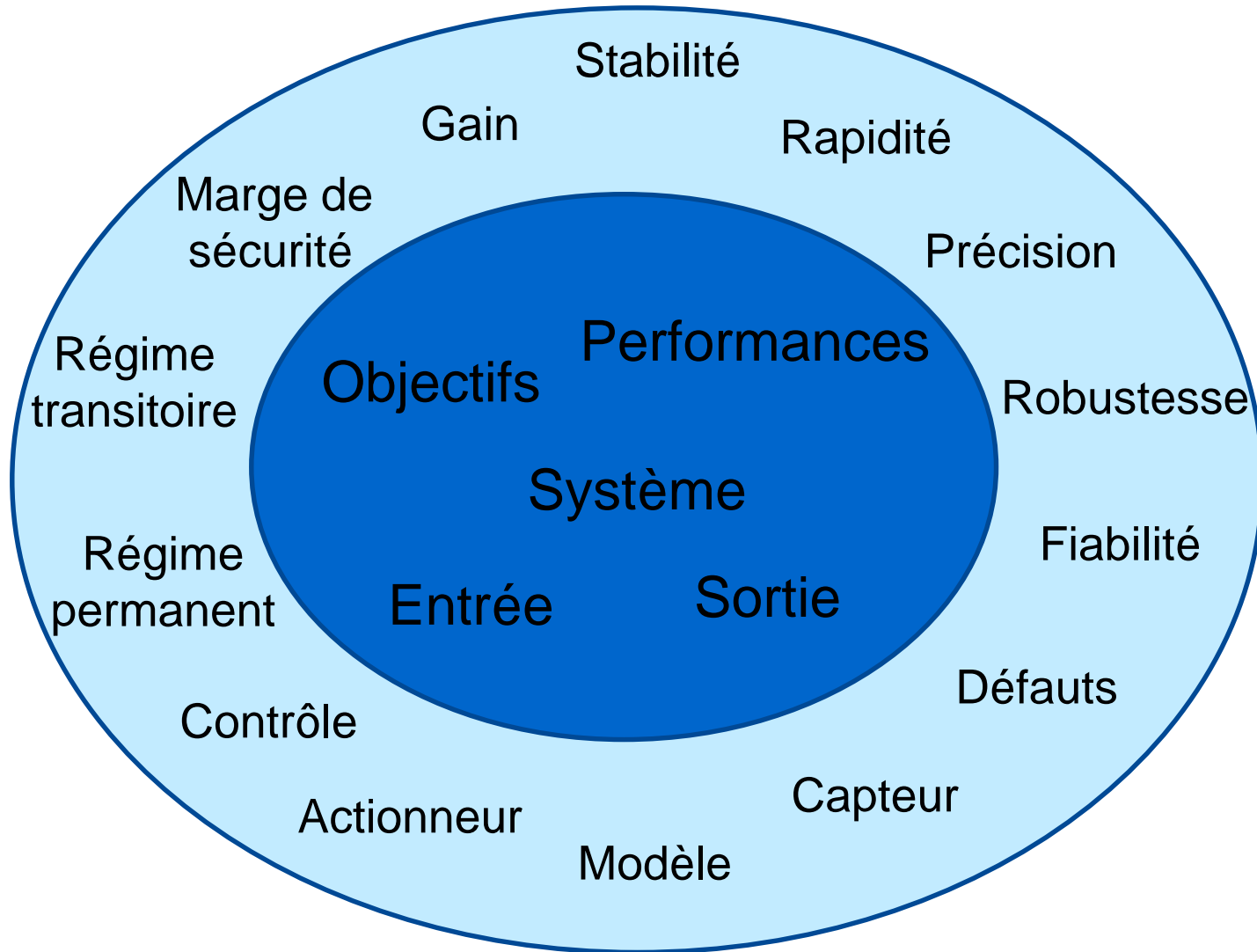
L'Automatique et la transition énergétique

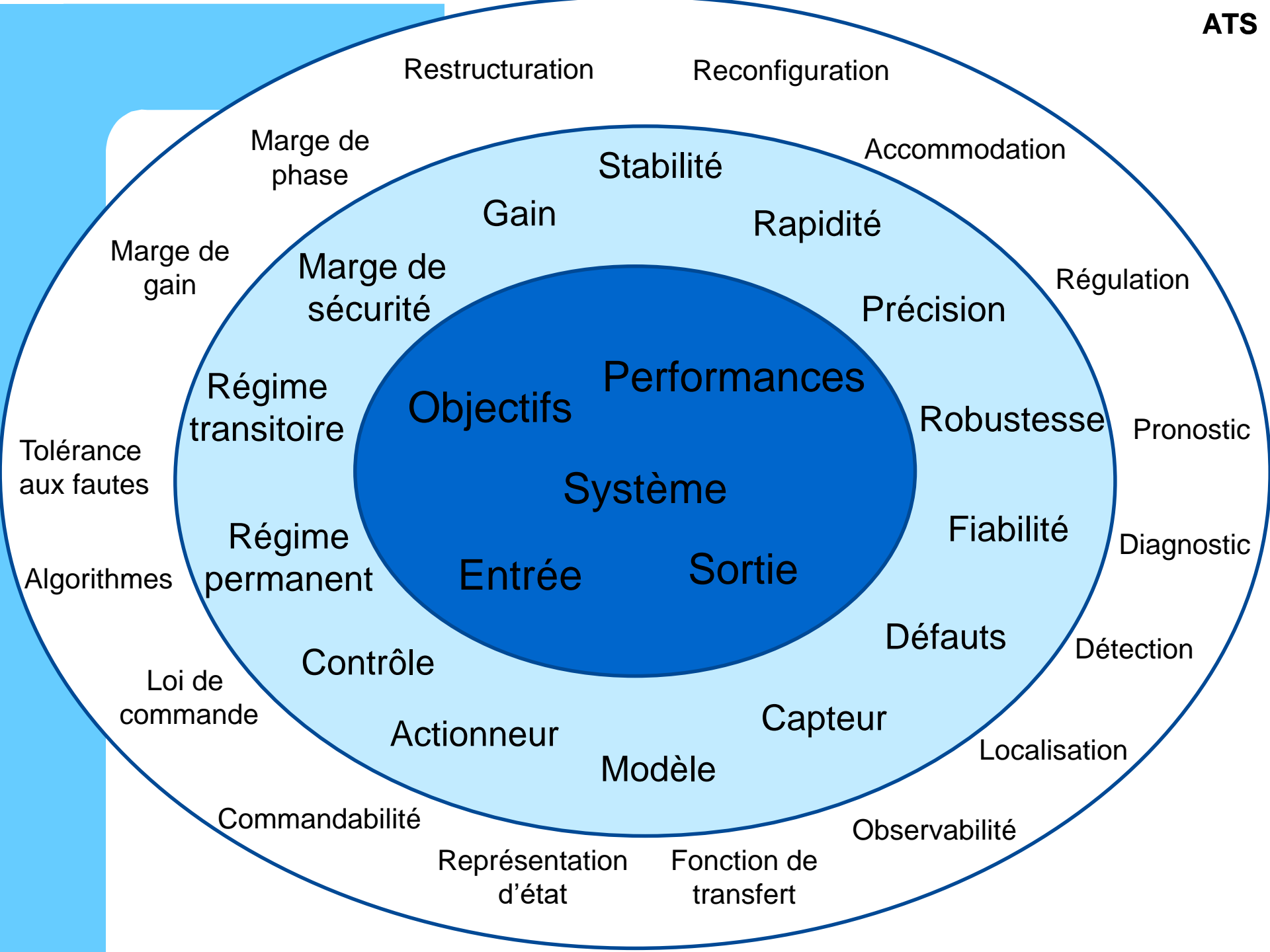
Evolution du nombre de livres et d'articles publiés par l'Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE) au cours des trois dernières décennies :



Source : IEEE Xplore, juin 2020







Les systèmes automatiques

Les systèmes automatisés :

Programmation séquentielle où l'automatisation porte sur un nombre fini d'opérations prédéterminées dans leur déroulement.

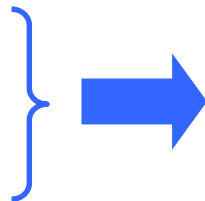
Exemples : ascenseur, chaîne de fabrication d'une automobile

Les systèmes asservis :

Programmation visant à permettre à un système donné de remplir une mission particulière sans connaissance a priori de tous les cas de figure possibles.

Régulation

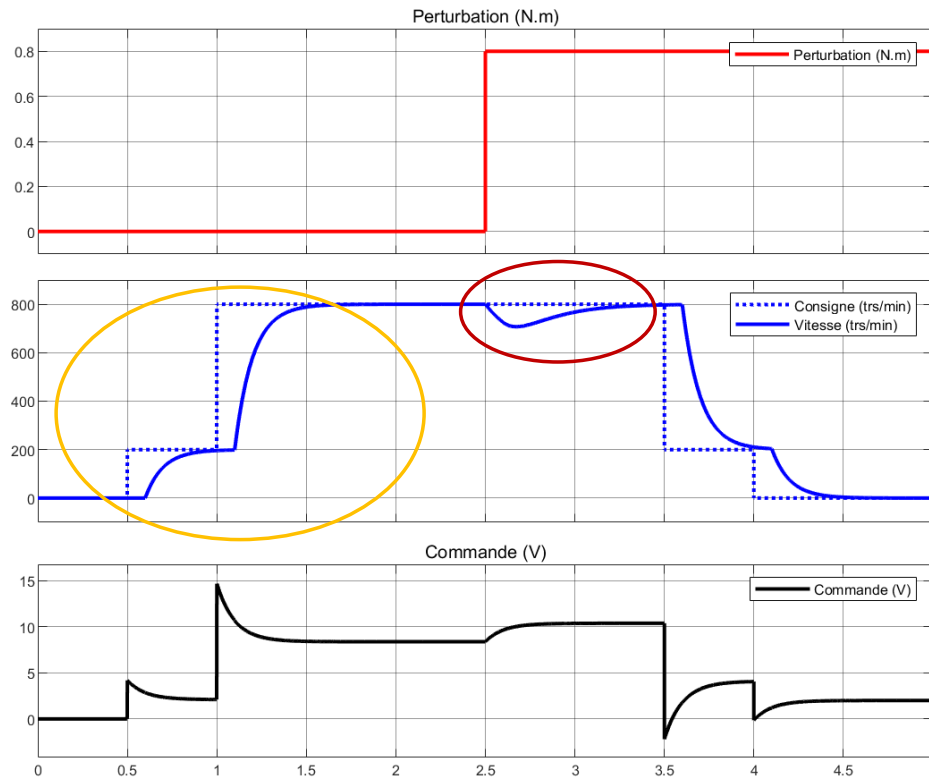
Asservissement



- de tension, d'intensité,
- de position, de vitesse, d'accélération,
- de concentration,
- de pression,
- de température,
- de débit,
- de niveau,
- ...

Régulation & asservissement

Exemple : asservissement / régulation de vitesse d'un moteur électrique



Régulation :

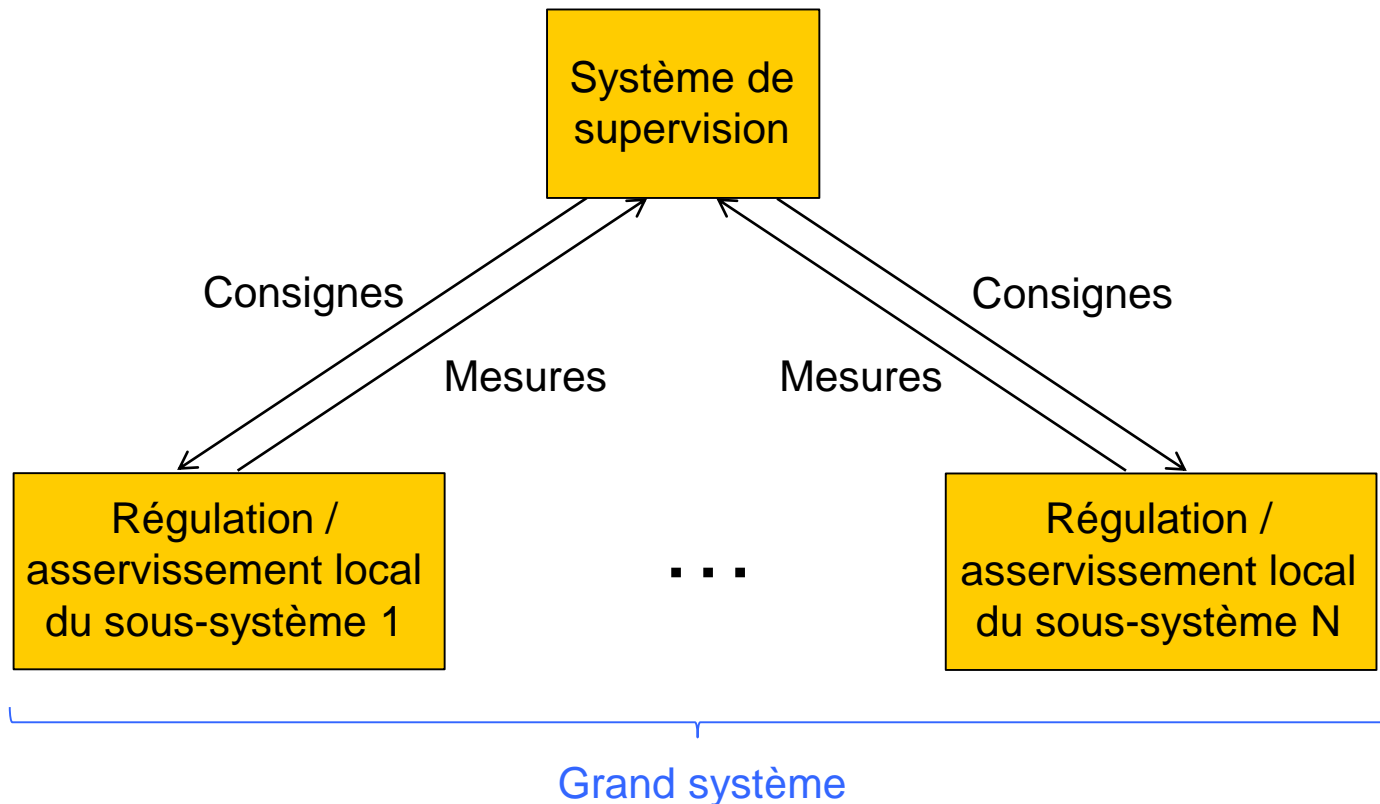
La tâche à réaliser consiste à maintenir une ou plusieurs grandeurs physiques d'un système à des valeurs constantes.

Asservissement :

La tâche à réaliser consiste à faire suivre une loi non fixée à l'avance à une ou plusieurs grandeurs physiques d'un système (poursuite de trajectoire).

L'Automatique dans les grands systèmes

Grand système : Système constitué de petits systèmes, appelés sous-systèmes.



Dans le cadre de ce cours, nous ne nous intéresserons qu'aux problèmes de régulation ou d'asservissement locaux.

Chapitre 1

Modélisation des systèmes monovariabiles

Chapitre 1 : Acquis d'apprentissage visés

Etre capable, à l'issue du chapitre, de :

- Représenter un système sous la forme d'un schéma-bloc
- Etablir la fonction de transfert d'un système monovariante
- Identifier les paramètres d'un système monovariante (1^{er}/ 2nd ordre)

Définitions

Système (ou processus) dynamique :

Ensemble de relations causales entre des grandeurs d'entrée et des grandeurs de sorties.

Causalité :

La réponse d'un système à un stimulus ne peut avoir lieu qu'après l'apparition de ce stimulus.

Entrées :

Variables qui permettent d'agir sur le système.

Sorties :

Variables (d'état) du système qui peuvent être mesurées.

Perturbations :

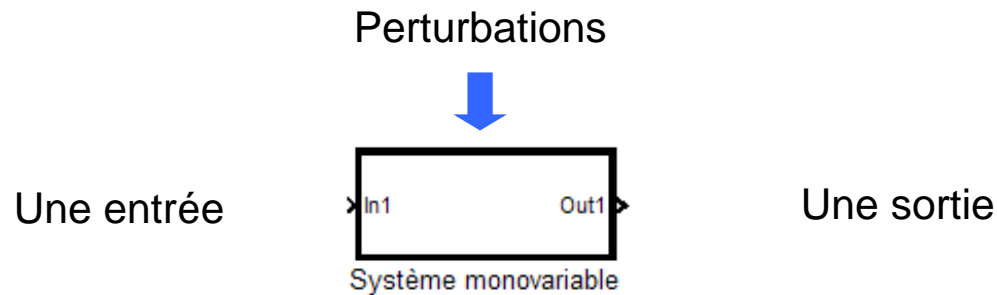
Variables indépendantes qui influencent l'état du système et donc ses sorties.

Exemples d'entrée et de sortie d'un système :

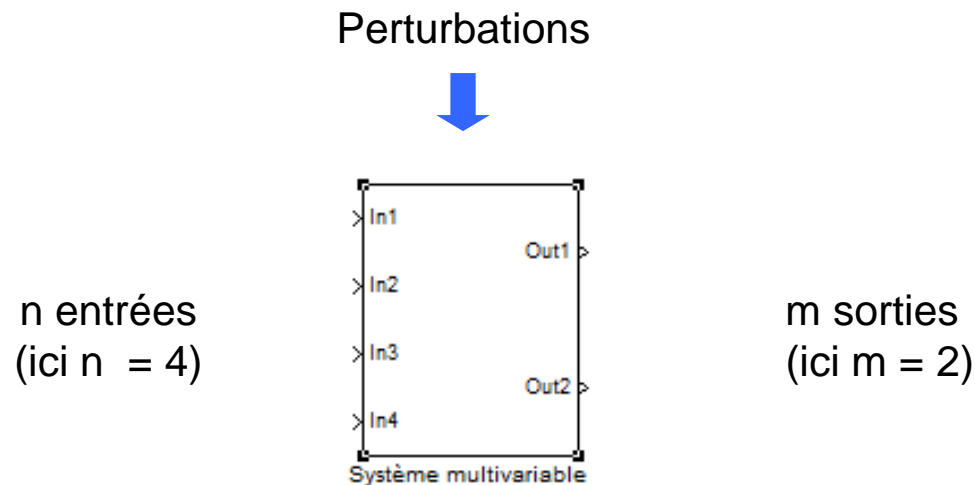
Intensité, tension, vitesse, débit, pression, température, etc.

Systemes monovariabiles / multivariabiles

Systemes monovariabiles (ou SISO : single-input / single-output) :



Systemes multivariabiles (ou MIMO : multi-input / multi-output) :



Modélisation des systèmes

Objectifs de la modélisation :

Mieux connaître le système étudié (grandeurs physiques influentes)

Simuler le fonctionnement du système (expérimentation directe délicate)

Notion subjective :

Le modèle est issu de la rencontre d'un système et de son modélisateur et ne peut être exact.

vision du chimiste \neq vision du mécanicien \neq vision de l'électronicien

Exemple : batteries de voitures

Deux classes de modèles coexistent

les modèles de connaissance

les modèles de représentation

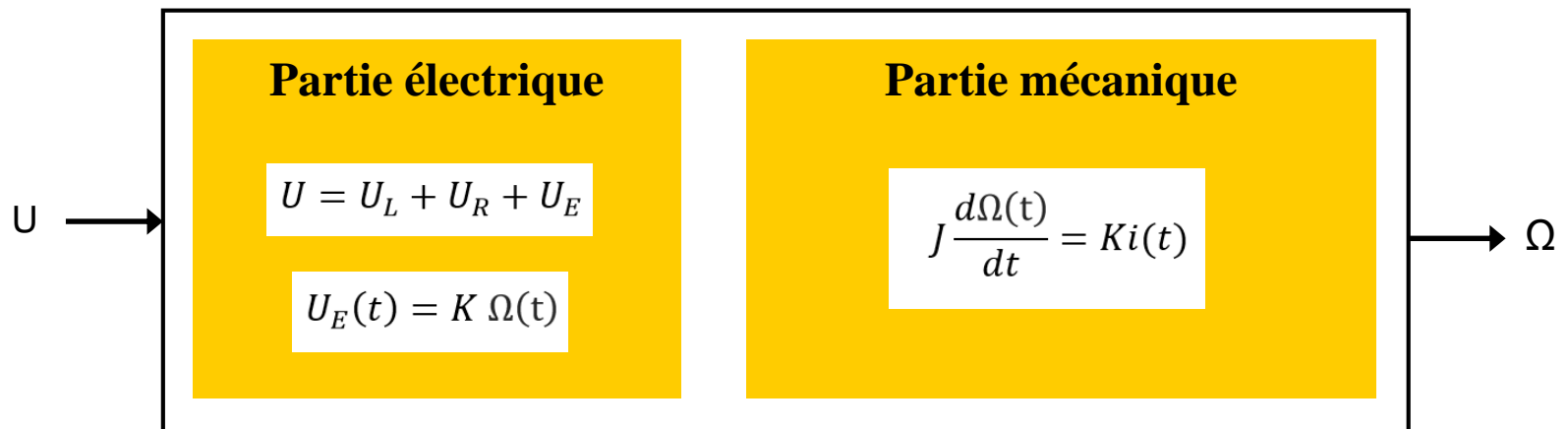
Les modèles de connaissance

Définition :

Modèles dont les caractéristiques et les équations ont été établies en faisant appel aux lois de la physique (approche boîte blanche).

Exemple :

Modélisation d'un moteur électrique à courant continu dont l'entrée est la tension U et la sortie est la vitesse angulaire du rotor



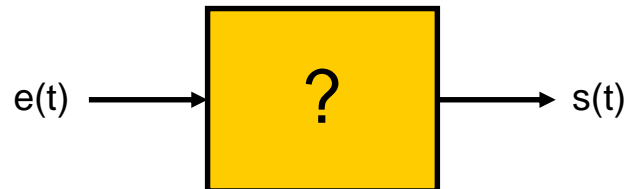
U_L : Tension aux bornes de l'inductance,
 U_R : Tension aux bornes de la résistance R ,
 U_E : Tension de la FCEM (Force Contre-ElectroMotrice),
 i : Courant traversant l'induit.

Les modèles de représentation

Définition :

Ils sont constitués d'un ensemble de relations mathématiques qui vont relier les différentes entrées et sorties du système considéré (approche boîte noire).

Les paramètres de tels modèles peuvent n'avoir aucun sens physique particulier connu.



Exemple :

approximation polynomiale à partir de résultats expérimentaux

$$s(t) = \lambda_0 + \lambda_1 e(t) + \lambda_2 e^2(t) + \dots + \lambda_n e^n(t)$$

Les systèmes linéaires

La classification des systèmes dynamiques a introduit la nécessité de distinguer les systèmes linéaires des systèmes non linéaires.

Définition d'un système linéaire :

Au sens mathématique du terme, un système sera dit linéaire s'il vérifie le principe de superposition qui s'énonce ainsi :

soit un système dont le signal d'entrée est $e(t)$ et le signal de sortie $s(t)$

Si une combinaison linéaire de x signaux en entrée :

$$\lambda_1 e_1(t) + \lambda_2 e_2(t) + \dots + \lambda_x e_x(t)$$

génère un signal de sortie $s(t)$ pouvant s'écrire sous la forme :

$$s(t) = \lambda_1 s_1(t) + \lambda_2 s_2(t) + \dots + \lambda_x s_x(t)$$

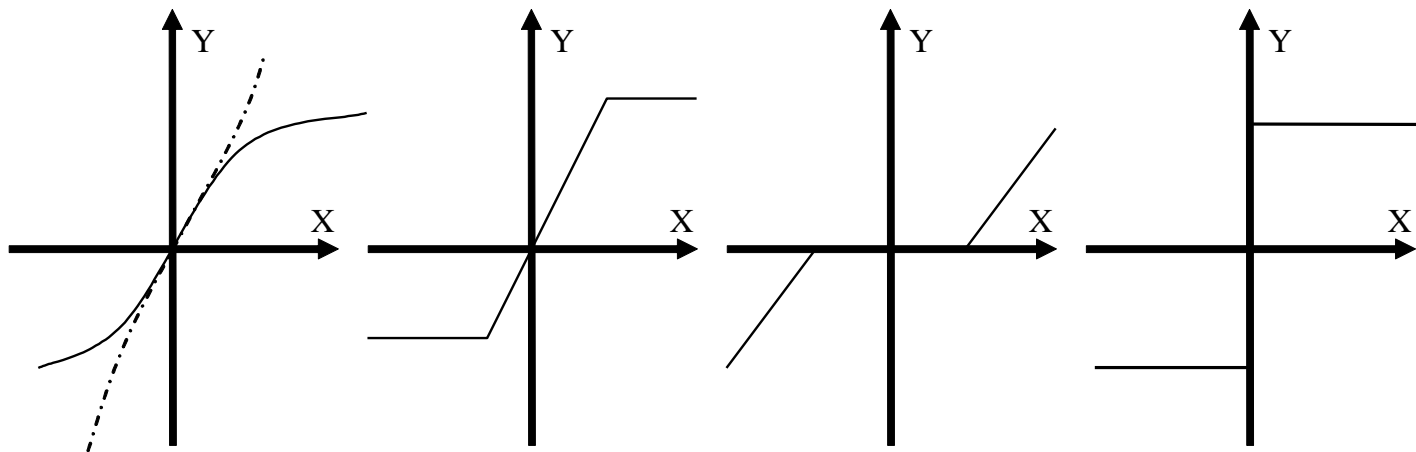
alors ce système est linéaire.

Limites de la linéarité

Dans la réalité :

Les systèmes physiques ne sont pas linéaires d'une façon absolue. On ne peut en adopter, la plupart du temps, une représentation linéaire que dans un domaine donné (échelle de temps, espace, température, ...) et vis-à-vis d'un certain critère (distorsion, précision, stabilité, ...).

Exemples de non linéarités :



--- Courbure dure
— Courbure moue

Saturation dissymétrique

Seuil

Plus ou moins,
ou relais

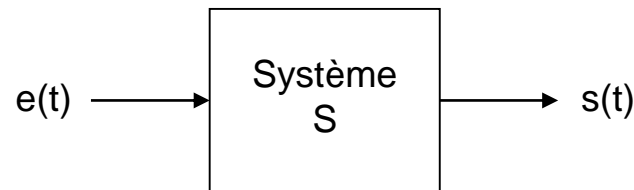
Les systèmes invariants dans le temps

Définition :

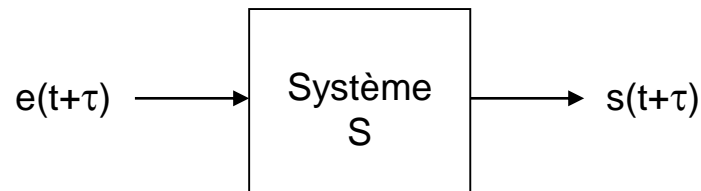
Un système est dit invariant si sa réponse temporelle à une excitation en entrée ne dépend que du type d'excitation.

En d'autres termes : Un système est invariant lorsque ses paramètres n'évoluent pas au cours du temps (le système ne vieillit pas).

En considérant les signaux d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ d'un système S ,



ce système sera dit invariant si :



Les systèmes dynamiques linéaires continus

Système dynamique :

Système dont les entrées sont a priori variables

Représentation mathématique d'un système dynamique linéaire continu :

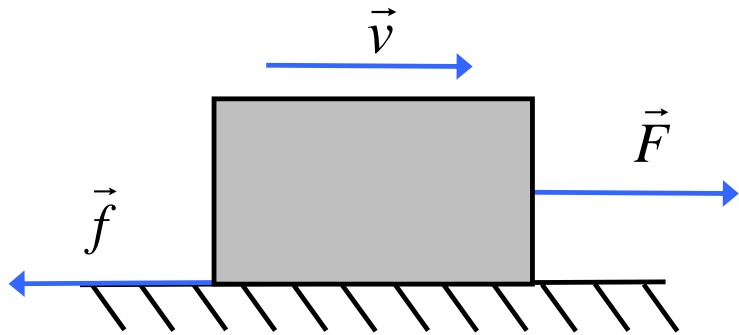
Les systèmes dynamiques linéaires invariants monovariables sont régis par une équation différentielle d'ordre fini à coefficients constants du type :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

où $e(t)$ est la grandeur d'entrée et $s(t)$ la grandeur de sortie

Il faut $n+m$ conditions initiales : $s(0)$, $e(0)$, ...

Exemple d'une masse m en translation

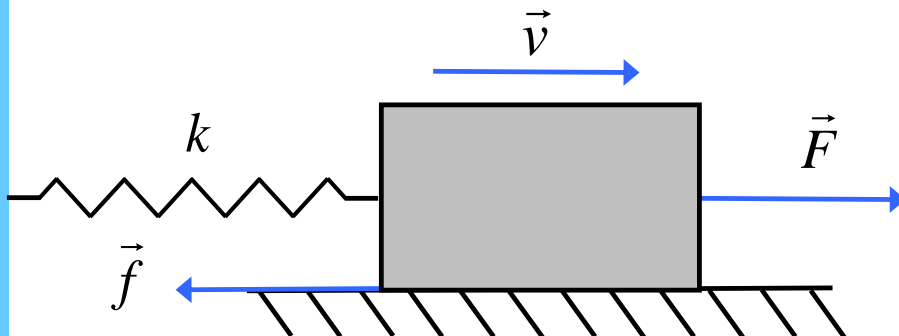


Frottements : $\vec{f} = -\alpha \cdot \vec{v}$

Relation fond. de la dynamique :

$$m \frac{dv}{dt} = F - \alpha \cdot v \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{m}{\alpha} \frac{dv(t)}{dt} + v(t) = \frac{1}{\alpha} F}$$

Dynamique décrite par une équation diff. du 1^{er} ordre



$$\boxed{m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = F}$$

Dynamique décrite par une équation diff. du 2nd ordre

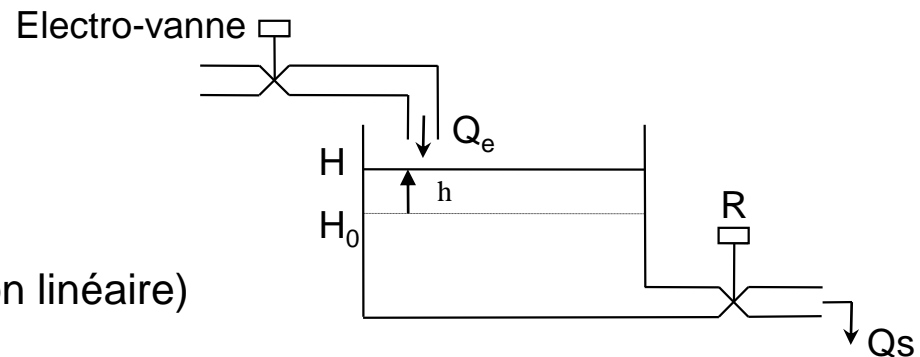
Linéarisation des systèmes : exemple (1/2)

Système considéré : cuve tampon d'une ligne de fabrication de sodas

$$Q_e - Q_s = S \frac{dH}{dt}$$

Avec : S : section de la cuve

$$Q_s = K\sqrt{H} \quad (\text{relation non linéaire})$$



Linéarisation autour du point d'équilibre H_0 correspondant à : $Q_e = Q_s = Q_0$

$$Q_0 = K\sqrt{H_0}$$

En considérant de petites variations autour de l'équilibre :

$$Q_e = Q_0 + q_e \quad Q_s = Q_0 + q_s \quad H = H_0 + h$$

$$\rightarrow q_e - q_s = S \frac{dh}{dt}$$

Linéarisation des systèmes : exemple (2/2)

$$Q_s = K\sqrt{H_0 + h} = K\sqrt{H_0}\sqrt{1 + \frac{h}{H_0}} = Q_0\sqrt{1 + \frac{h}{H_0}}$$

Avec $h \ll H_0$, en se limitant à un DL d'ordre 1 :

$$Q_s = Q_0 + q_s \approx Q_0\left(1 + \frac{h}{2H_0}\right) \rightarrow q_s = \frac{Q_0}{2H_0}h$$

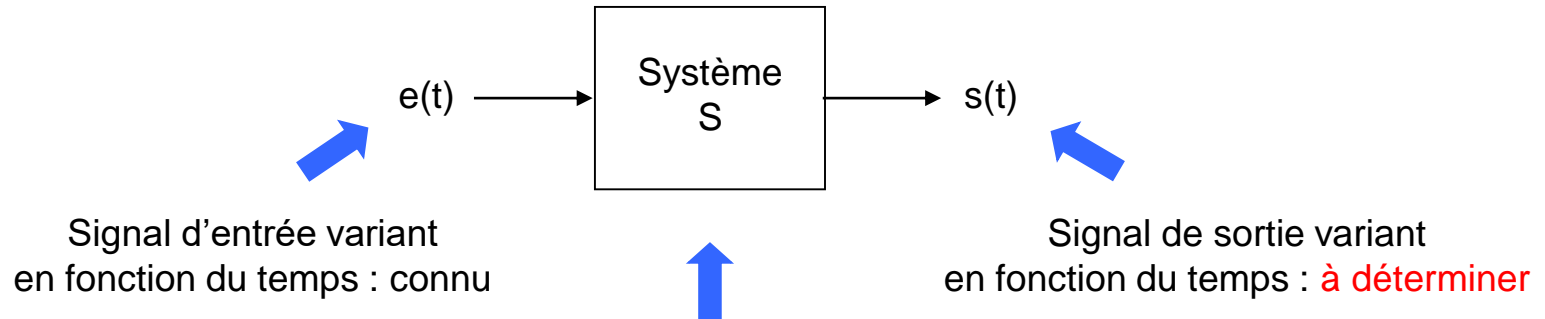
D'après $q_e - q_s = S \frac{dh}{dt}$, en posant $\lambda = \frac{Q_0}{2H_0}$

Système linéaire du 1^{er} ordre

$$q_e = \lambda h + S \frac{dh}{dt}$$

Comment déterminer la réponse d'un système à un signal d'entrée ?

Problème :

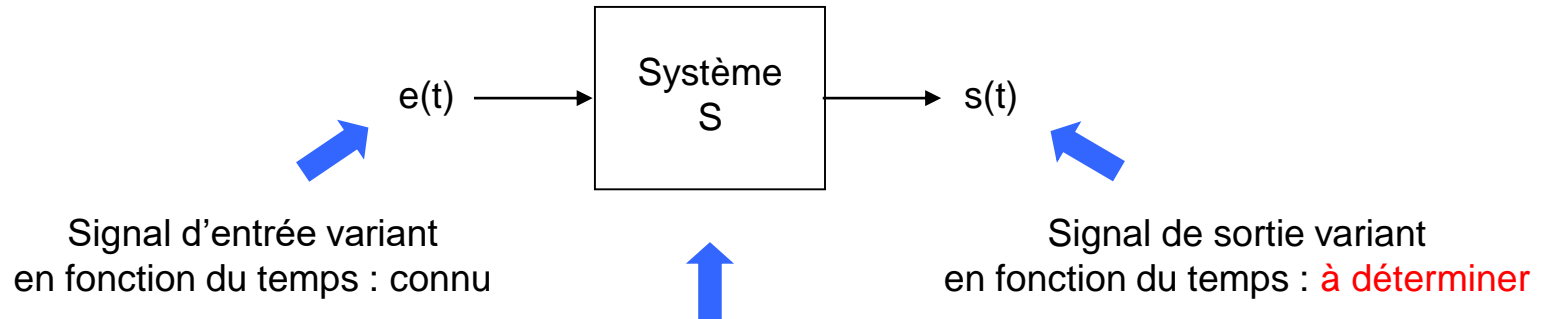


Equation différentielle :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Comment déterminer la réponse d'un système à un signal d'entrée ?

Problème :



Equation différentielle :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Merci Pierre-Simon Laplace (1749-1827) !

Transformée de Laplace (1/4)

Définition :

Application de l'ensemble des fonctions du temps, nulles avant l'instant $t = 0$, dans l'ensemble des fonctions d'une variable complexe p (variable de Laplace) définie par :

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

Sa réciproque est : $L^{-1}[F(p)] = f(t)$

Exemples de fonctions utilisées en Automatique comme signal d'entrée :

	$e(t)$		$E(p)$
Impulsion de Dirac	$\delta(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	1
Echelon unitaire	$\Gamma(t)$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{1}{p}$
Rampe de pente a	$a.t$	$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	$\frac{a}{p^2}$

Transformée de Laplace (2/4)

Théorème important sur la dérivation des fonctions du temps :

$$L[f^{(n)}(t)] = p^n F(p) - p^{n-1} f(0^+) - p^{n-2} f^{(1)}(0^+) - \dots - p f^{(n-2)}(0^+) - f^{(n-1)}(0^+)$$

Passage d'une équation différentielle à une fonction de transfert :

$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

$\mathcal{L} \downarrow$ Conditions initiales nulles

$$a_n p^n S(p) + a_{n-1} p^{n-1} S(p) + \dots + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + b_{m-1} p^{m-1} E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Transformée de Laplace (3/4)

1) Détermination de $S(p)$:

Fonction de transfert : connue



$$S(p) = H(p)E(p)$$



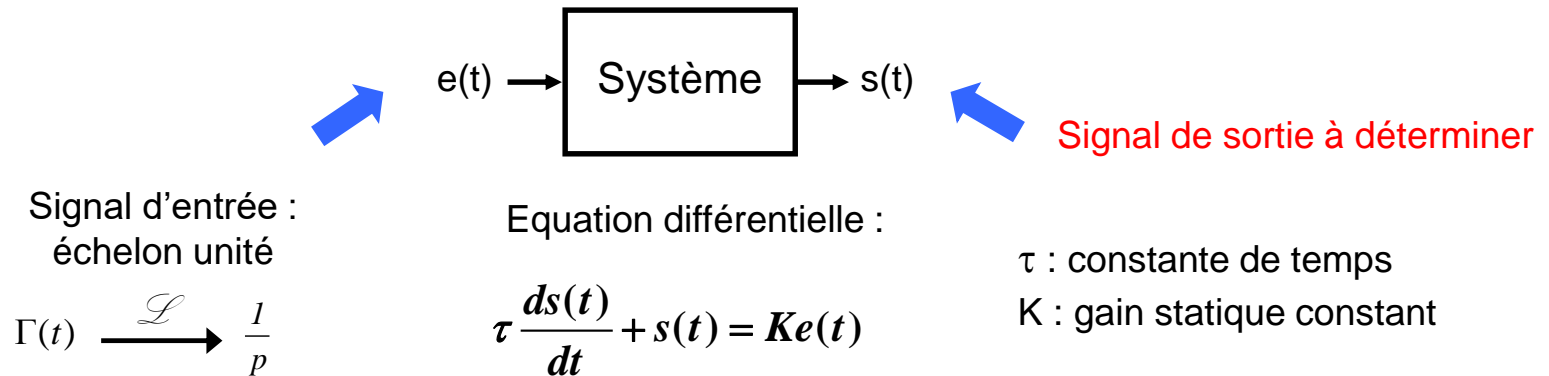
Transformée de Laplace
du signal d'entrée : connue

2) Détermination de $s(t)$:

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}[S(p)]$$

Transformée de Laplace (4/4) : exemple

Systeme considéré :



Fonction de transfert :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau p} \quad \text{en supposant les conditions initiales nulles}$$

Détermination de $S(p)$ et retour à l'original $s(t)$:

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau p} \cdot \frac{1}{p} \quad \xrightarrow{\text{Décomposition éléments simples}} \quad S(p) = K \left(\frac{1}{p} - \frac{\tau}{1 + \tau p} \right) \quad \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad s(t) = K \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

Systemes propres / systemes impropres

Fonction de transfert générique :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Systemes impropres :


$\text{deg}(\text{numérateur}) > \text{deg}(\text{dénominateur})$

Systemes propres :

$\text{deg}(\text{numérateur}) = \text{deg}(\text{dénominateur})$

Systemes strictement propres :

$\text{deg}(\text{numérateur}) < \text{deg}(\text{dénominateur})$

Principe de

 causalité

Seuls systemes existants

Ordre et classe d'un système

Système d'ordre n :

c'est le plus haut degré de dérivation de la sortie $s(t)$ par rapport au temps dans l'équation différentielle

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{système d'ordre } n}$$

Système de classe k :

On dit qu'un système est de classe k si $e(t)$ figure explicitement dans l'équation différentielle mais pas $s(t)$, $\dot{s}(t)$, ..., $s^{k-1}(t)$

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_0}{p^k (1 + a_1 p + \dots + a_n p^n)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{système de classe } k \text{ et d'ordre } k+n}$$

Remarque : Le four industriel constitue un système d'ordre 2 et de classe 1

Pôles et zéros d'un système

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

Les **zéros** de cette transmittance sont les m racines du **numérateur**.

Les **pôles** de cette transmittance sont les n racines du **dénominateur**.

La forme factorisée de H(p) est :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m (p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$$

The diagram illustrates the factorized form of the transfer function H(p). The numerator is shown as a product of factors (p - z₁)(p - z₂)... (p - z_m), and the denominator is shown as a product of factors (p - p₁)(p - p₂)... (p - p_n). Blue arrows point from the zero factors to a red-bordered box labeled "m zéros de H(p)". Similarly, blue arrows point from the pole factors to a red-bordered box labeled "n pôles de H(p)".

Les pôles p_i ainsi que les zéros z_j sont réels et/ou complexes conjugués.

Equation caractéristique d'un système

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}$$

L'équation caractéristique d'un système est le dénominateur de sa fonction de transfert posé égal à zéro :

Equation caractéristique de H(p) :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

Les pôles d'une fonction de transfert sont donc les solutions de l'équation caractéristique de cette fonction de transfert.

Cas d'un système d'ordre n (1/2)

Dans le cas où $H(p)$ présente r pôles réels et q paires de pôles complexes conjugués, ($n = r + 2q$) cette transmittance peut s'écrire comme suit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n \underbrace{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_r)}_{r \text{ pôles réels}} \underbrace{\left((p - \alpha_1)^2 + \beta_1^2 \right) \dots \left((p - \alpha_q)^2 + \beta_q^2 \right)}_{q \text{ paires de pôles complexes conjugués}}$$

Grâce à une décomposition en éléments simples, on peut écrire :

$$H(p) = \frac{A_1}{p - p_1} + \dots + \frac{A_j}{p - p_j} + \dots + \frac{A_r}{p - p_r} + \frac{B_1 p + C_1}{(p - \alpha_1)^2 + \beta_1^2} + \dots + \frac{B_i p + C_i}{(p - \alpha_i)^2 + \beta_i^2} + \dots + \frac{B_q p + C_q}{(p - \alpha_q)^2 + \beta_q^2}$$

$H(p)$ se décompose alors en une somme de transmittances du premier et du second ordre :

$$H(p) = \underbrace{H_1(p) + \dots + H_j(p) + \dots + H_r(p)}_{\text{premier ordre}} + \underbrace{H'_1(p) + \dots + H'_i(p) + \dots + H'_q(p)}_{\text{second ordre}}$$

Cas d'un système d'ordre n (2/2)

$$S(p) = H_1(p)E(p) + \dots + H_j(p)E(p) + \dots + H_r(p)E(p)$$

r réponses de systèmes du 1^{er} ordre

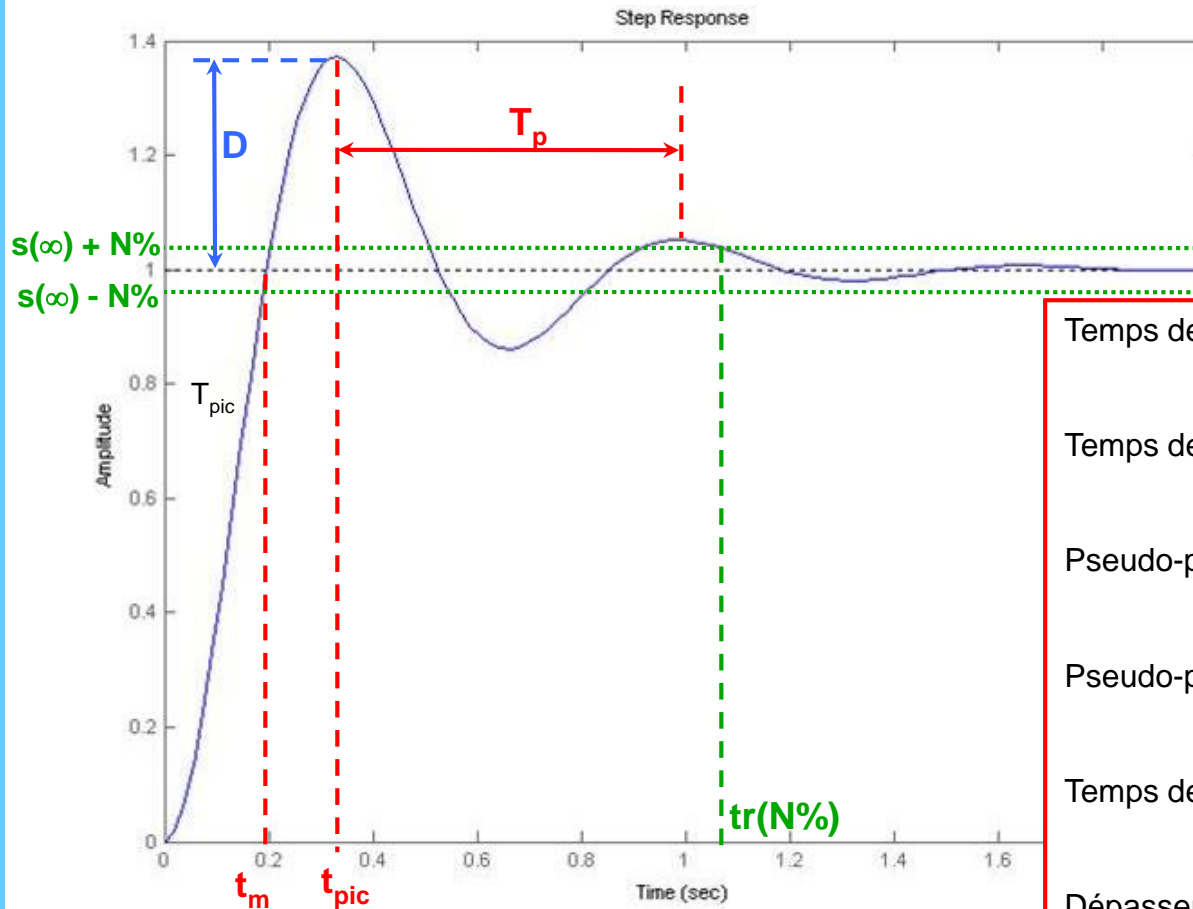
$$+ H'_1(p)E(p) + \dots + H'_i(p)E(p) + \dots + H'_q(p)E(p)$$

q réponses de systèmes du 2nd ordre

La réponse d'un système d'ordre n peut être déterminée par la superposition des réponses d'un certain nombre de systèmes du 1^{er} ordre et du 2nd ordre. D'où l'importance de l'étude de ces systèmes.

Quelques formules relatives aux systèmes du 2^{ème} ordre apériodiques (1/2)

Réponse indicielle d'un système du 2^{ème} ordre apériodique ($\xi < 1$) de gain statique $K = 1$:



$$F(p) = \frac{K\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$$

$$\text{Temps de montée : } t_m = \frac{1}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}(\pi - \arccos \xi)$$

$$\text{Temps de pic : } t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\text{Pseudo-période : } T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

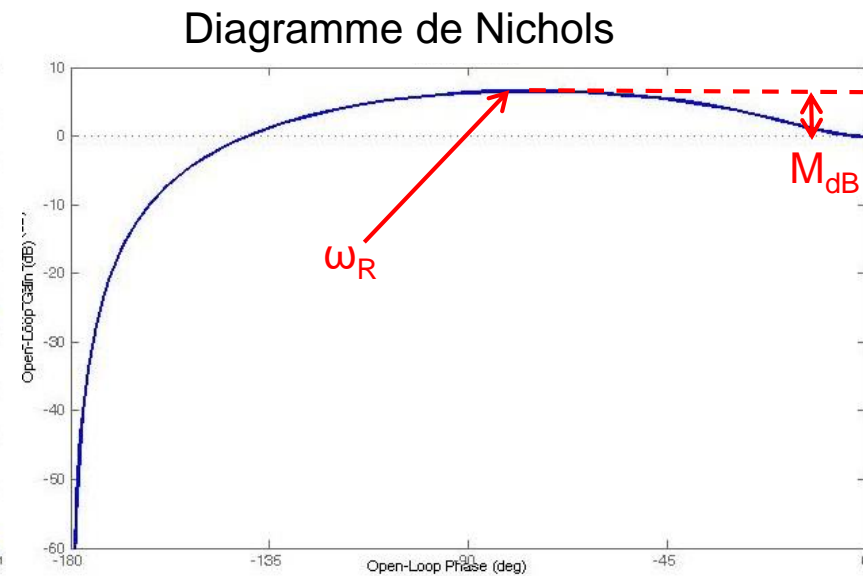
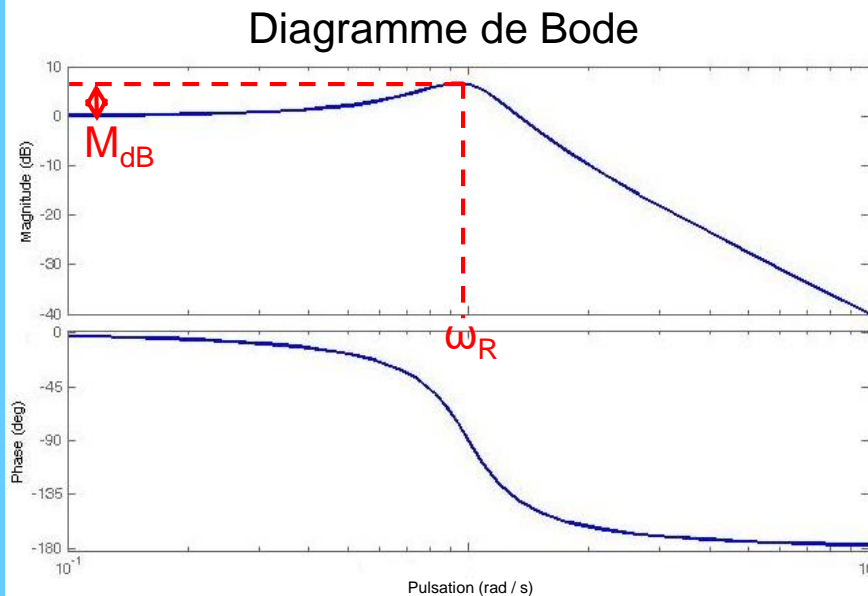
$$\text{Pseudo-pulsation : } \omega_p = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\text{Temps de réponse à N\% : } t_r(N\%) = \frac{\ln\left(\frac{100}{N}\right)}{\omega_0\xi}$$

$$\text{Dépassement \% : } D\% = 100D = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Quelques formules relatives aux systèmes du 2^{ème} ordre apériodiques (2/2)

Cas des systèmes résonnants ($\xi < 1/\sqrt{2}$) :

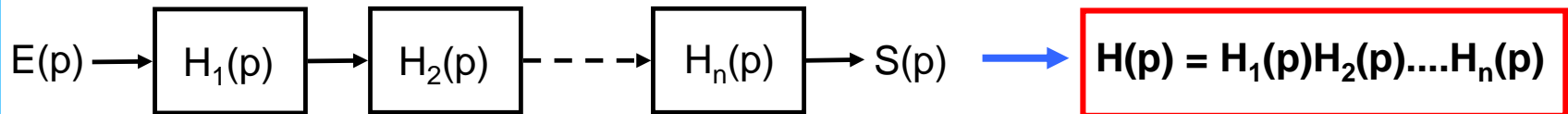


Pulsation de résonance : $\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$

Facteur de résonance : $M_{dB} = G_{dB}(\omega_R) - G_{dB}(0) = 20 \log \left(\frac{1}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}} \right)$

Composition de transmittances (1/4)

Systèmes en cascade :

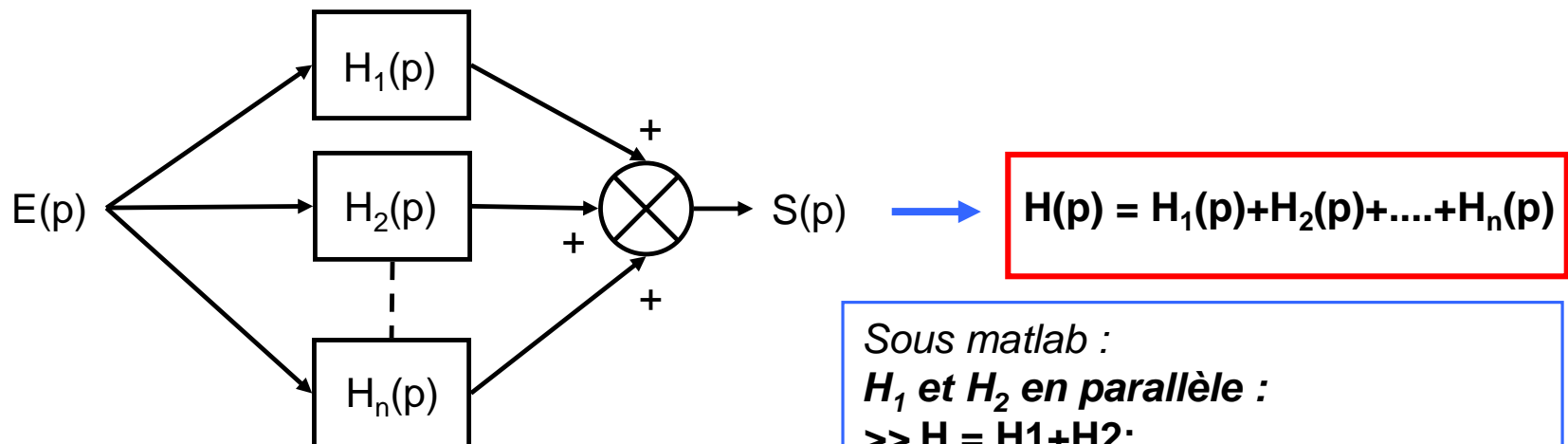


Sous matlab :

H₁ et H₂ en cascade :

>> H = H1*H2;

Systèmes en parallèle :

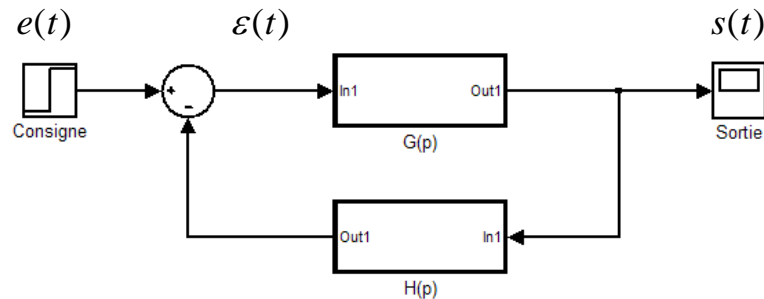


Sous matlab :

H₁ et H₂ en parallèle :

>> H = H1+H2;

Composition de transmittances (2/4)



Fonction de Transfert
en Boucle Fermée (FTBF):

$$S(p) = G(p)\varepsilon(p)$$

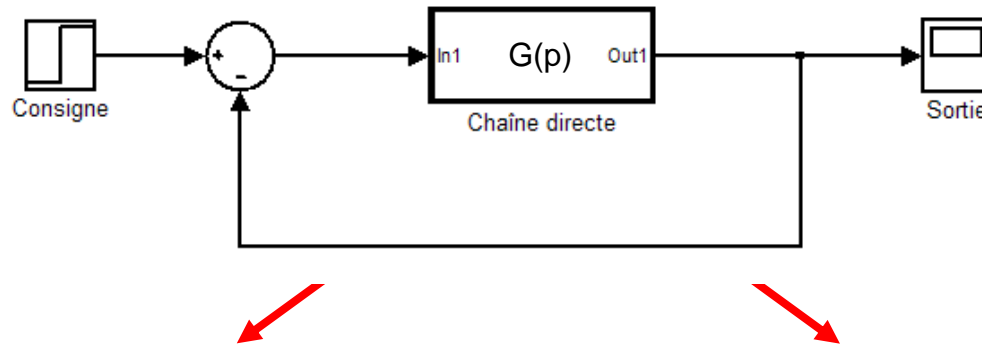
$$\varepsilon(p) = E(p) - H(p)S(p)$$

$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)}$$

Fonction de transfert
en Boucle Ouverte (FTBO) :

$$FTBO = G(p)H(p)$$

Composition de transmittances (3/4)



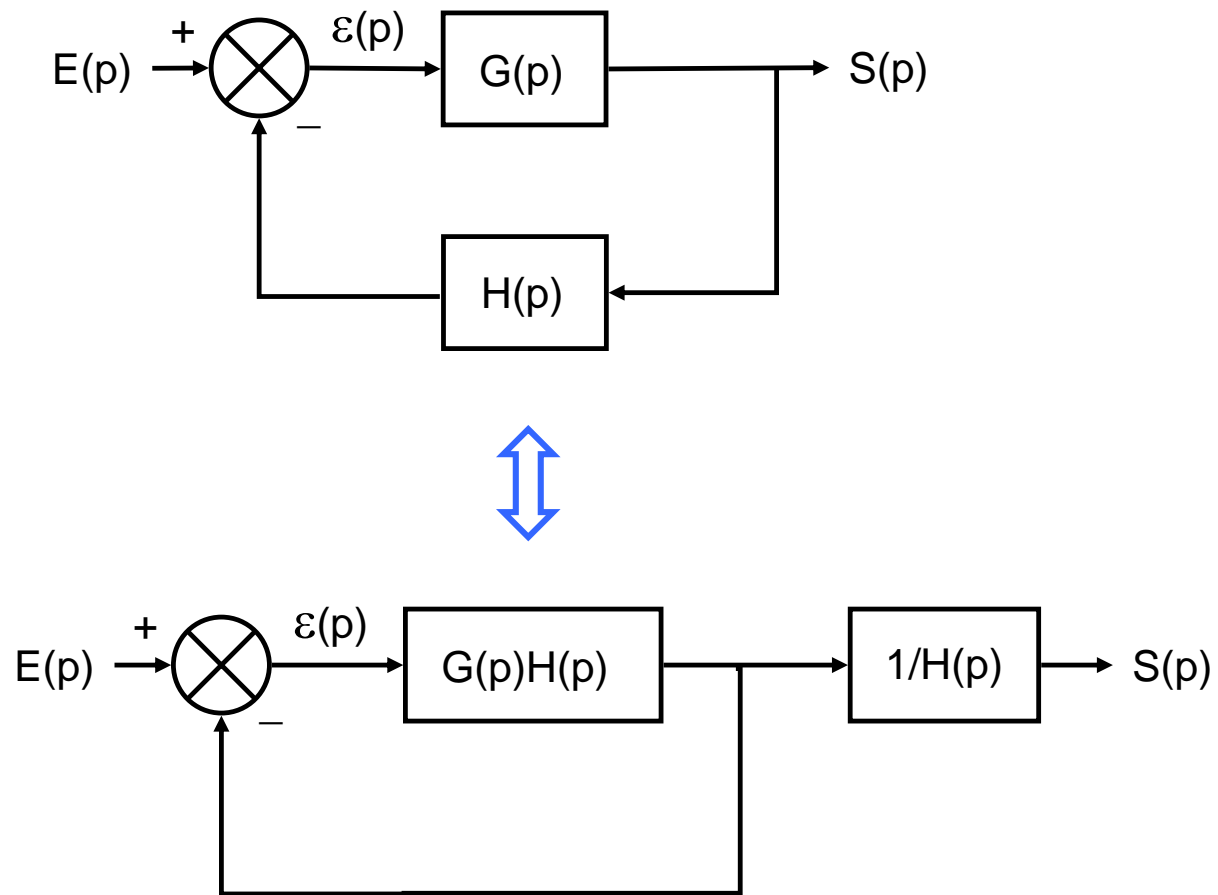
Fonction de transfert en BF :

$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1+G(p)}$$

Fonction de transfert en BO :

$$FTBO = G(p)$$

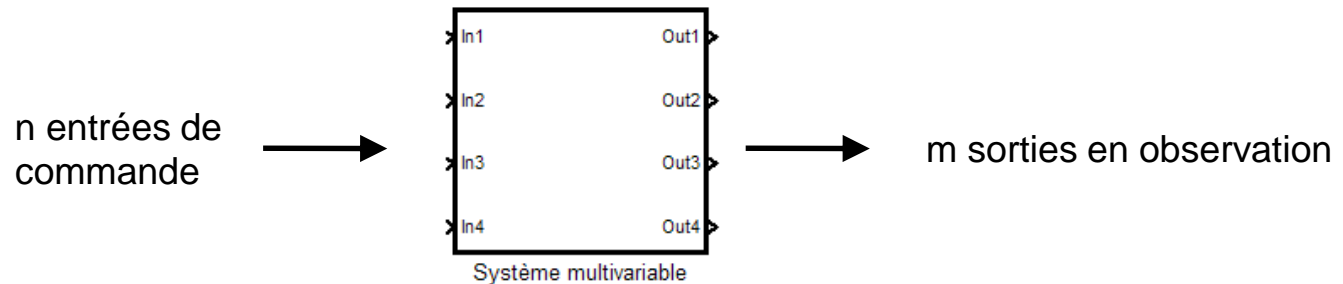
Composition de transmittances (4/4)



Systemes lineaires multivariables (1/2)

Pour représenter un système avec plusieurs grandeurs à contrôler :

Un système MIMO avec n variables d'entrée et m variables de sortie



$$S_1(p) = H_{11}(p)E_1(p) + \dots + H_{1i}(p)E_i(p) + \dots + H_{1n}(p)E_n(p)$$

⋮

$$S_j(p) = H_{j1}(p)E_1(p) + \dots + H_{ji}(p)E_i(p) + \dots + H_{jn}(p)E_n(p)$$

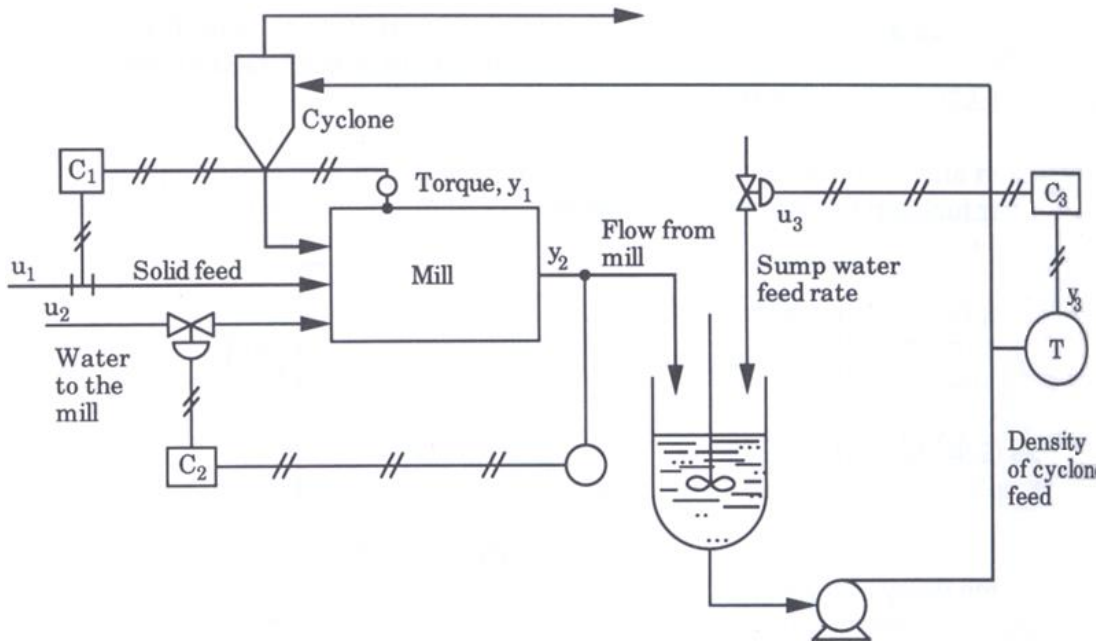
⋮

$$S_m(p) = H_{m1}(p)E_1(p) + \dots + H_{mi}(p)E_i(p) + \dots + H_{mn}(p)E_n(p)$$

où $H_{ji}(p)$ est la fonction de transfert entre la $i^{\text{ème}}$ entrée et la $j^{\text{ème}}$ sortie.

Systemes lineaires multivariables (2/2)

Exemple de systeme multivariable : Broyeur humide industriel



$H_{11}(p) = \frac{119}{217p+1}$	$H_{23}(p) = \frac{-5 \times 10^{-5}}{10p+1}$
$H_{12}(p) = \frac{153}{337p+1}$	$H_{31}(p) = \frac{930}{500p+1}$
$H_{13}(p) = \frac{-21}{10p+1}$	$H_{32}(p) = \frac{-667e^{-320p}}{166p+1}$
$H_{21}(p) = \frac{3.7 \times 10^{-4}}{500p+1}$	$H_{33}(p) = \frac{-1033}{47p+1}$
$H_{22}(p) = \frac{7.67 \times 10^{-4}}{33p+1}$	

Couple du moteur faisant tourner le broyeur (Nm) $\longrightarrow y_1(p) = H_{11}(p)u_1(p) + H_{12}(p)u_2(p) + H_{13}(p)u_3(p)$

Débit en sortie du broyeur (= mill) (m^3/s) $\longrightarrow y_2(p) = H_{21}(p)u_1(p) + H_{22}(p)u_2(p) + H_{23}(p)u_3(p)$

Densité d'alimentation du cyclone (kg/m^3) $\longrightarrow y_3(p) = H_{31}(p)u_1(p) + H_{32}(p)u_2(p) + H_{33}(p)u_3(p)$

Alimentation en solide du broyeur (kg/s)

Alimentation en eau du broyeur (kg/s)

Alimentation en eau du mélangeur (= sump) (kg/s)

QCM sur le Chapitre 1

Chapitre 2

Quantification des performances des systèmes bouclés

Chapitre 2 : Acquis d'apprentissage visés

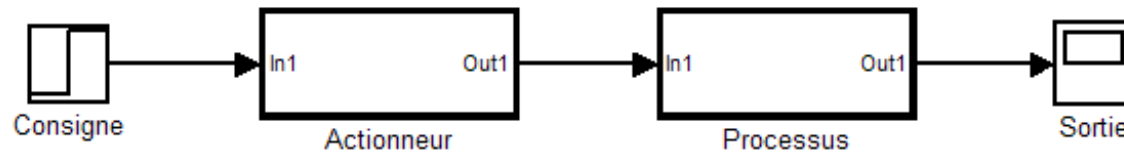
Etre capable, à l'issue du chapitre, de :

- Analyser la stabilité par les critères de Routh et de Nyquist
- Analyser la stabilité par les critères du revers et de Nichols.
- Evaluer la rapidité (temps de réponse).
- Evaluer la précision (erreurs statique et dynamique).

Principe de la commande en boucle ouverte

Système en boucle ouverte :

- système dont aucune information sur la grandeur de sortie n'est disponible



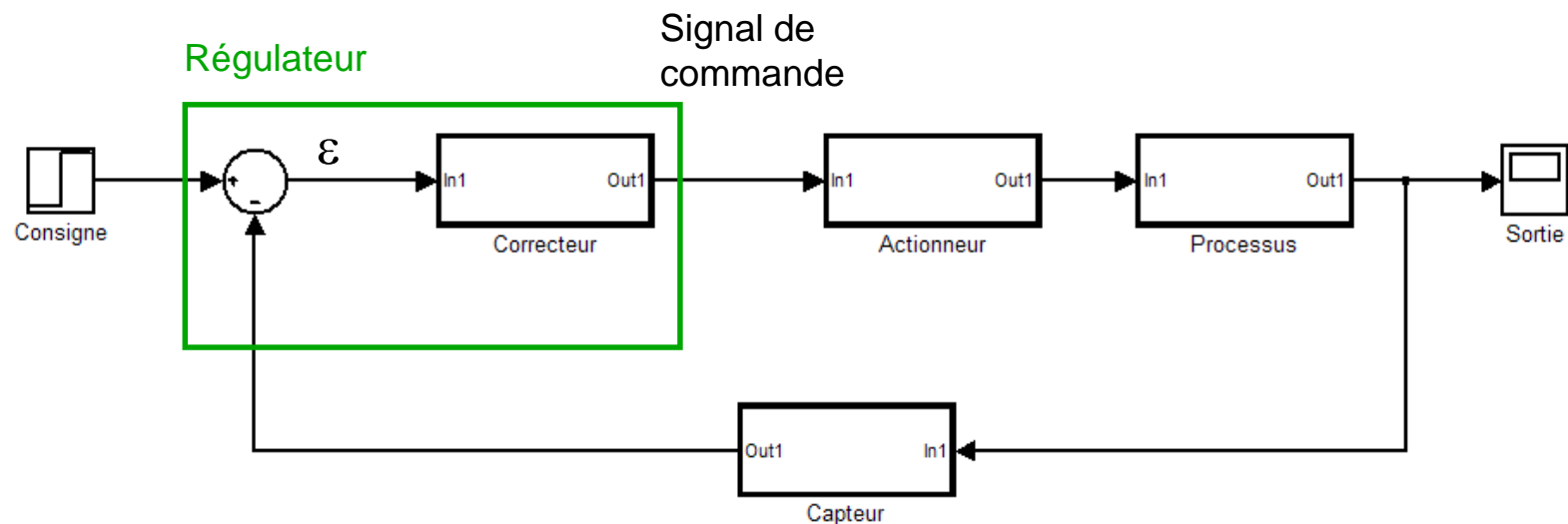
les perturbations qui agissent sur le système ne sont pas prises en compte

Principe de la commande en boucle fermée

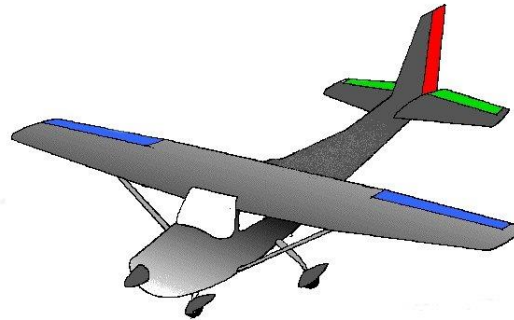
Principe général :

- 1) Observation (mesure de la grandeur à contrôler via un capteur)
- 2) Réflexion (comparaison de la grandeur mesurée avec la valeur désirée)
- 3) Action (détermination d'un signal de commande pour modifier la grandeur à contrôler)

Système en boucle fermée :



Commande en boucle fermée : exercice



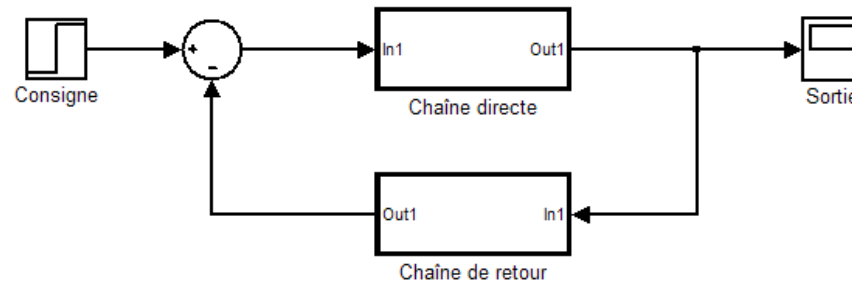
Le pilote automatique d'un avion est utilisé, notamment, en commandant l'altitude par l'intermédiaire du gouvernail de profondeur. Pour une première approche, le pilote automatique reçoit un signal électrique qui l'informe de l'altitude h de l'avion : ce signal proportionnel à h est fourni par l'altimètre.

Il est comparé à un signal de consigne proportionnel à l'altitude choisie h_c par le pilote et donne le signal d'erreur e . Un correcteur électrique traite l'erreur e et délivre un signal de commande u à un actionneur électro-hydraulique chargé de mouvoir le gouvernail de profondeur.

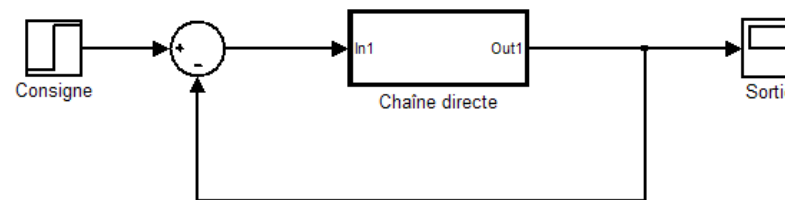
Donner la représentation complète de ce système sous la forme d'un schéma-bloc

Autres représentations des boucles fermées

Formes abrégées :

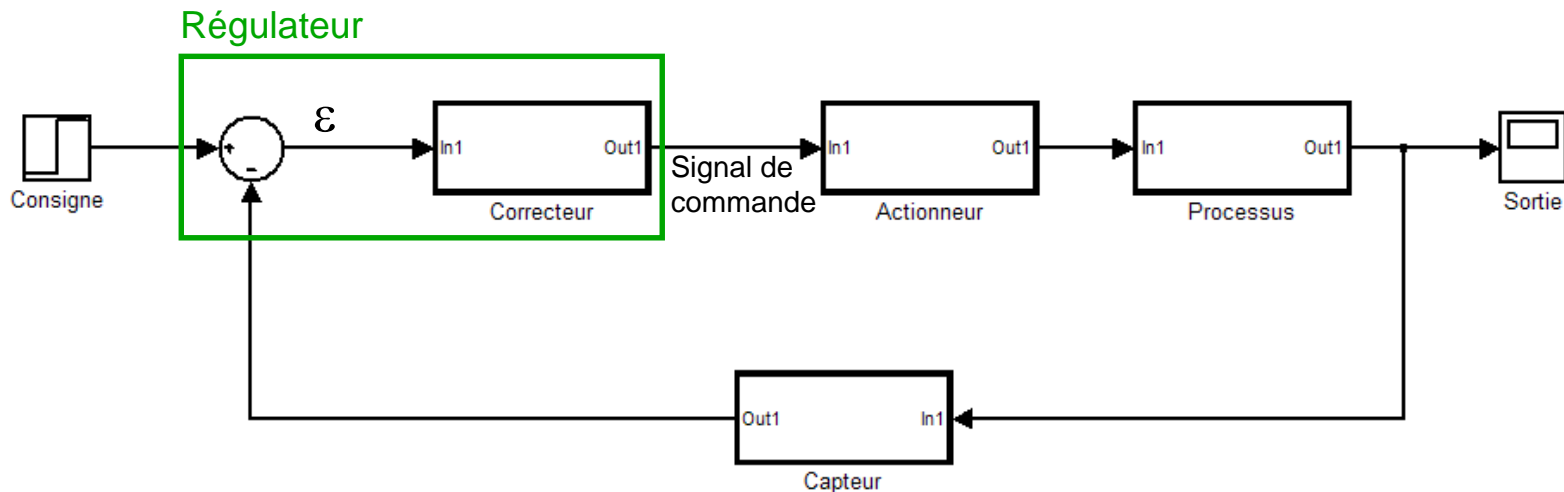


Si l'entrée et la sortie sont directement comparables sans transformation :



Systeme bouclé à retour unitaire

Objectif de la commande en boucle fermée



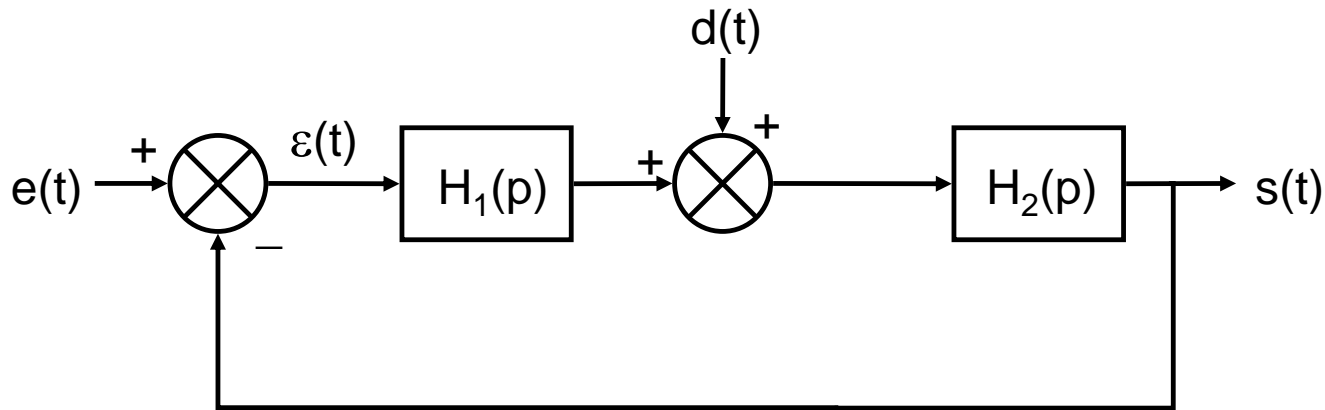
La détermination du correcteur est le problème essentiel de l'Automatique

Assurer le rejet de perturbations

Améliorer la stabilité, la précision et la rapidité

Modélisation d'un système perturbé : exercice

Prise en compte d'une perturbation $d(t)$:



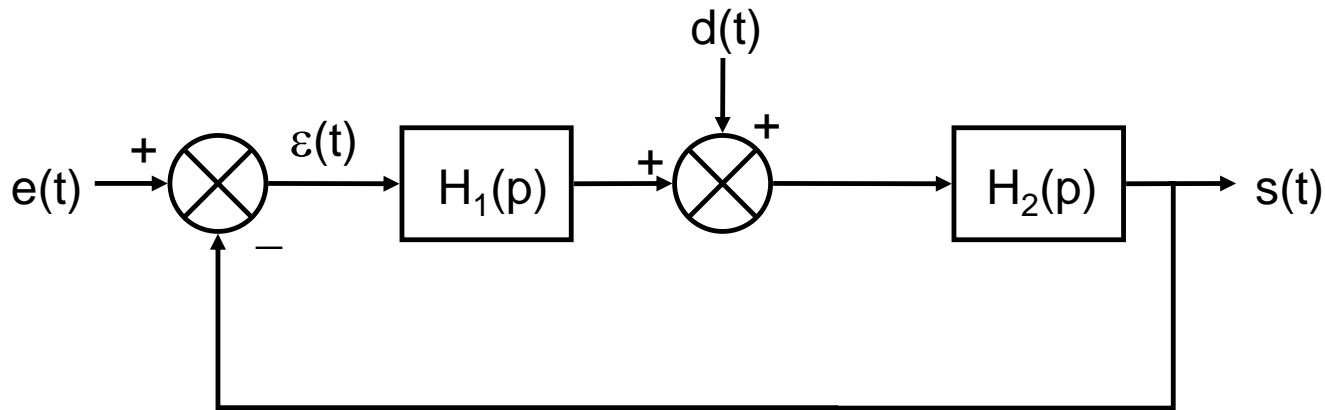
Déterminer l'expression de $S(p)$ en fonction de $E(p)$ et de $D(p)$

Méthode :

- 1) Annuler $e(t)$ puis exprimer $S(p)$ en fonction de $D(p)$
- 2) Annuler $d(t)$ puis exprimer $S(p)$ en fonction de $E(p)$
- 3) Appliquer le principe de superposition

Modélisation d'un système perturbé : solution

Prise en compte d'une perturbation $d(t)$:



$$S(p) = \underbrace{\frac{H_1(p)H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}}_{\text{Fonctionnement en asservissement}} E(p) + \underbrace{\frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}}_{\text{Fonctionnement en régulation}} D(p)$$

Fonctionnement en asservissement Fonctionnement en régulation

En régulation, on considère en général que la consigne est constante : $e(t) = 0$

En asservissement, on suppose l'absence de perturbation : $d(t) = 0$

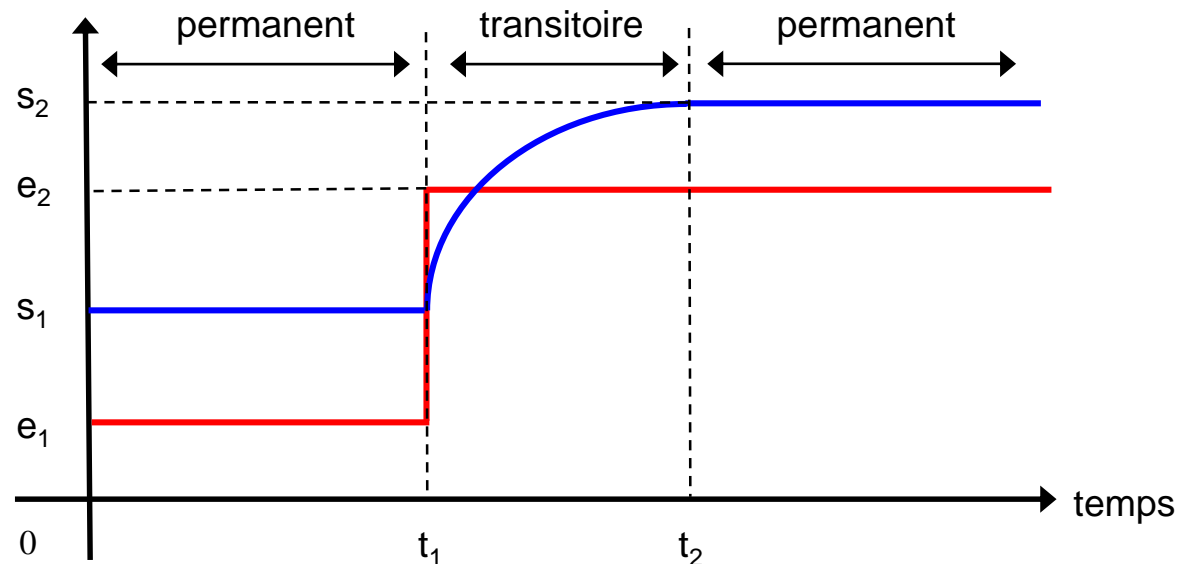
Rappel sur les régimes permanent et transitoire

Régime permanent :

Lorsqu'un système est soumis à une commande constante pendant un temps assez long, sa sortie prend alors à son tour une valeur constante. On dit alors que le système est en régime permanent

Régime transitoire :

Intervalle de temps entre deux régimes permanents



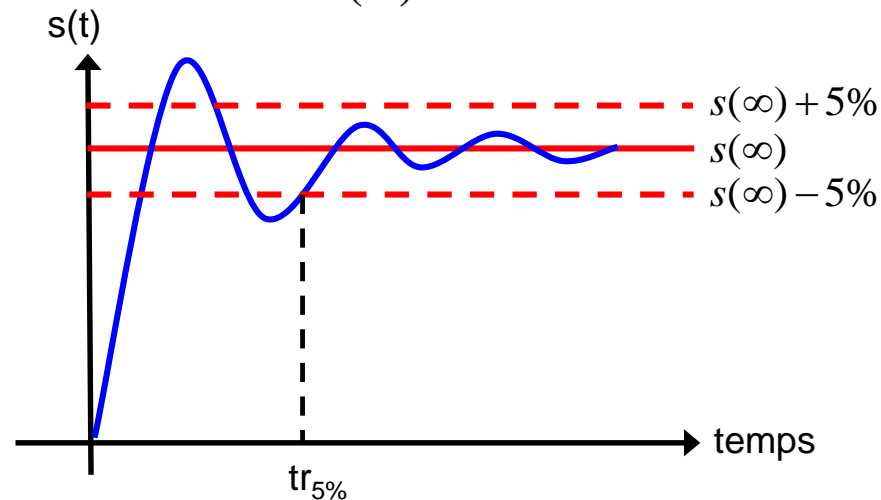
Rapidité

Définition :

Elle caractérise le temps que met le système à réagir à une brusque variation de l'entrée, c'est-à-dire le temps de réponse.

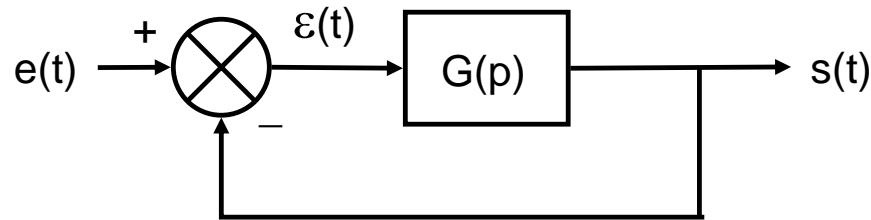
Pour une entrée en échelon, on considère souvent le temps de réponse à 5% : $tr_{5\%}$

$$\frac{|s(tr_{5\%}) - s(\infty)|}{s(\infty)} < 5\%$$



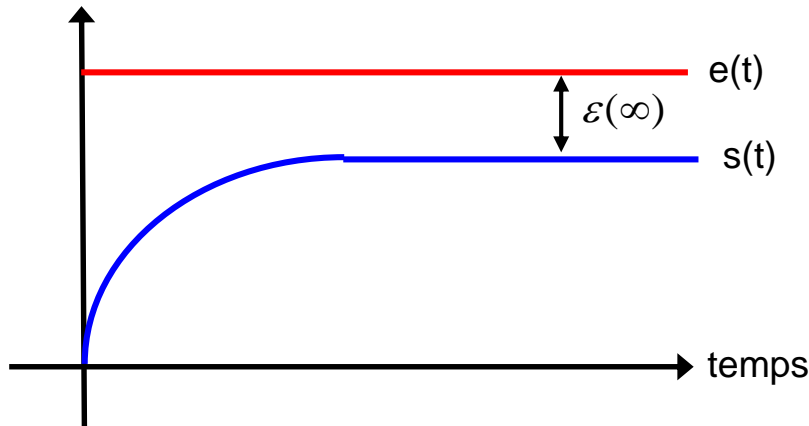
Suivant la grandeur de $tr_{5\%}$, le système est +/- rapide

Précision



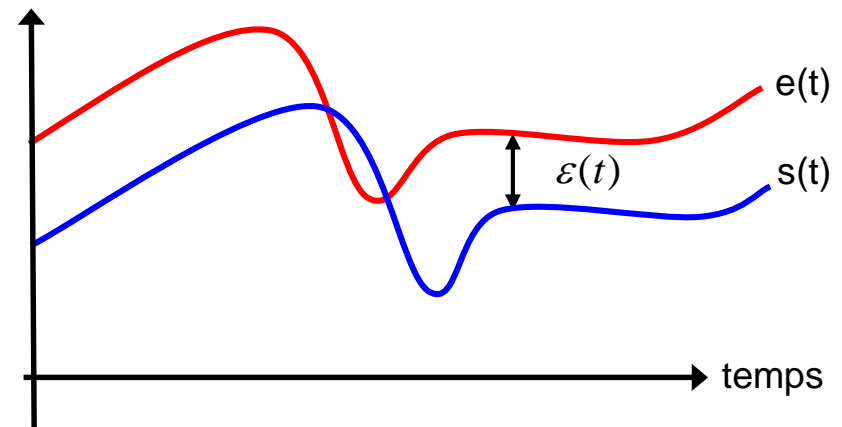
La précision statique :

Elle concerne les systèmes à entrée fixe (→ régulation) et s'exprime par une grandeur appelée erreur statique



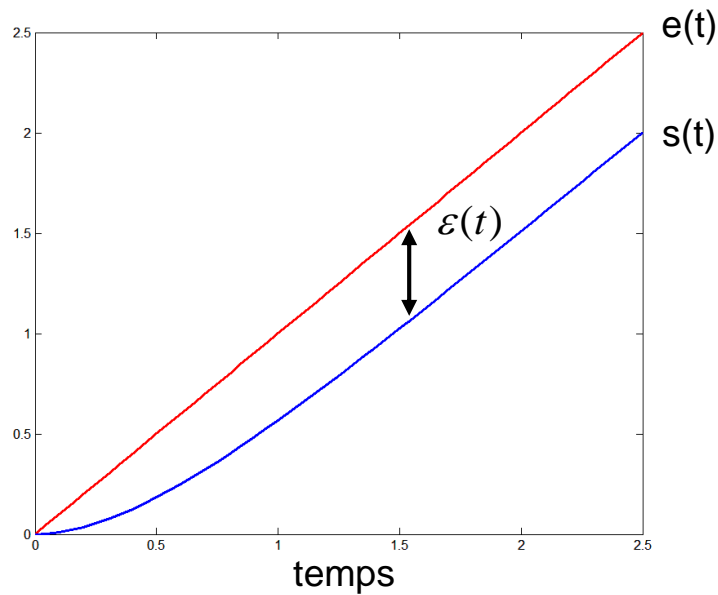
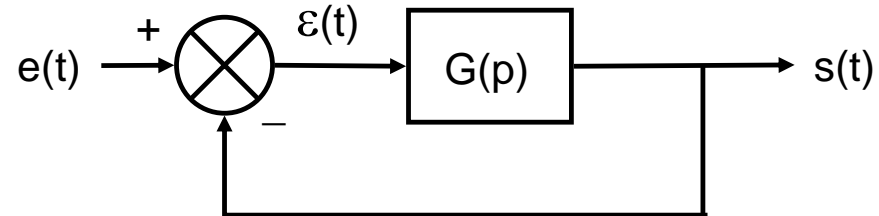
La précision dynamique :

Elle concerne les systèmes à entrée variable (→ asservissement) et s'exprime par une grandeur appelée erreur dynamique



Suivant la grandeur de l'erreur, le système est +/- précis

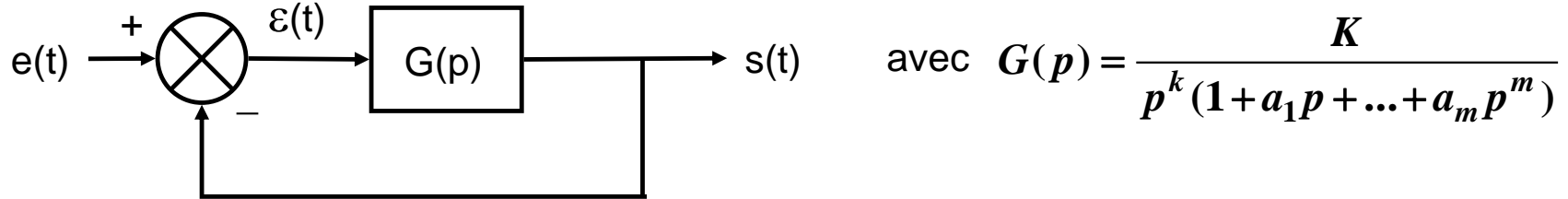
Précision (suite)



$\varepsilon(t)$: écart de traînage

Précision : calcul de l'erreur

Systeme considéré :



$$\varepsilon(p) = E(p) - S(p) \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K}{p^k (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}} E(p)$$

Théorème de la
valeur finale :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p \varepsilon(p)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{1}{1 + \frac{K}{p^k (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}} E(p)$$

$$\longrightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\frac{p^{k+1} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^k (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m) + K} E(p) \right)$$

L'erreur dépend donc de la forme du signal $e(t)$

Précision : calcul de l'erreur

Classe de G(p) Entrée	Classe de G(p)			
	k = 0	k = 1	k = 2	k > 2
$e(t) = A$	$\varepsilon = \frac{A}{1+K}$	0	0	0
$e(t) = v \cdot t$	∞	$\varepsilon = \frac{v}{K}$	0	0
$e(t) = \frac{1}{2}at^2$	∞	∞	$\varepsilon = \frac{a}{K}$	0

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0^+} \left(\frac{p^{k+1} (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m)}{p^k (1 + a_1 p + \dots + a_m p^m) + K} E(p) \right)$$

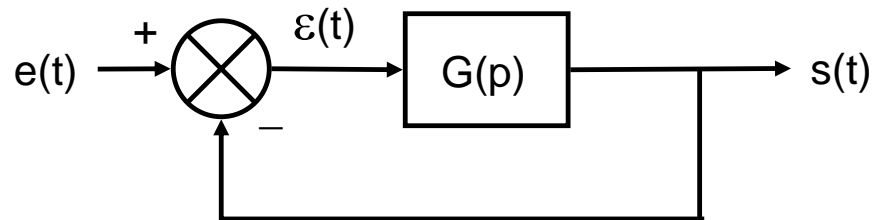
Précision : 1^{er} exemple applicatif

Systeme considéré :

un moteur à courant continu asservi en vitesse

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

(classe 0)



$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K}{1+Tp}} E(p)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \frac{1+Tp}{1+Tp+K} E(p)$$

$$\text{si } e(t) = a \quad E(p) = \frac{a}{p} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(\infty) = \frac{a}{1+K}$$

$$\text{si } e(t) = a.t \quad E(p) = \frac{a}{p^2} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(\infty) = \infty$$

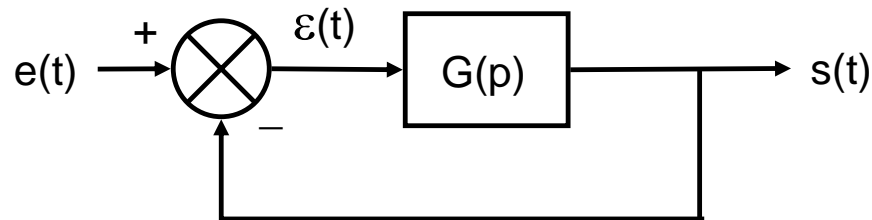
Précision : 2nd exemple applicatif

Systeme considéré :

un moteur à courant continu asservi en position

$$G(p) = \frac{K}{p(1+Tp)}$$

(classe 1)



$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K}{p(1+Tp)}} E(p)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \cdot \frac{p(1+Tp)}{p(1+Tp) + K} E(p)$$

$$\text{si } e(t) = a \quad E(p) = \frac{a}{p} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(\infty) = 0$$

$$\text{si } e(t) = a \cdot t \quad E(p) = \frac{a}{p^2} \quad \longrightarrow \quad \varepsilon(\infty) = \frac{a}{K}$$

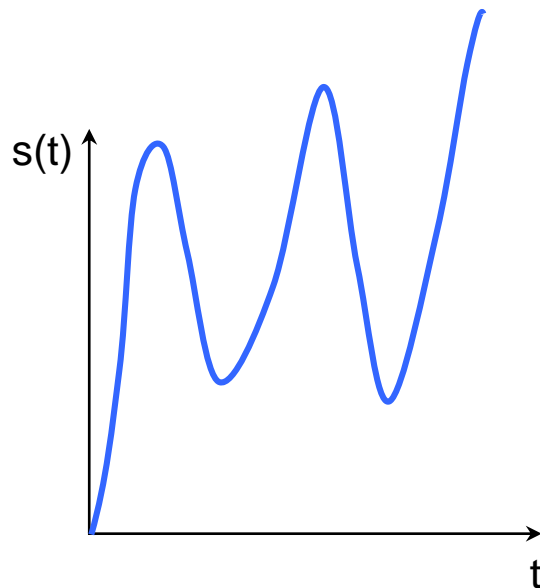
Stabilité

Définition :

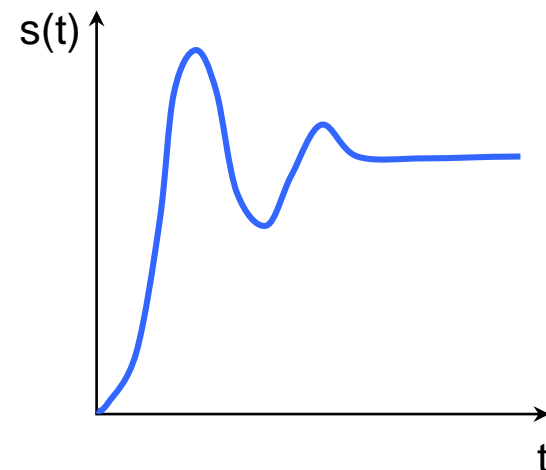
Un système linéaire est stable si sa réponse à un stimulus est un signal ne présentant pas de divergence temporelle.

Stabilité Entrée Bornée / Sortie Bornée :

Un système est stable EB / SB si la réponse à une entrée de type borné est elle-même un signal borné.



Systeme instable



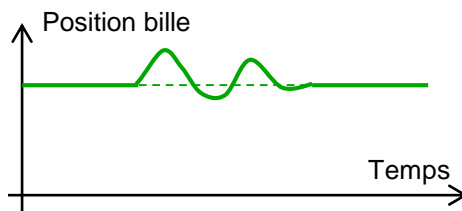
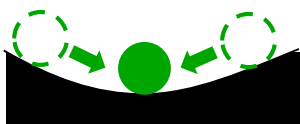
Systeme stable

Stabilité : types de stabilité

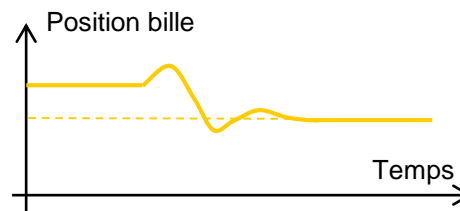
Types de stabilité

- Un système est dit simplement stable si, en partant dans le voisinage d'un point d'équilibre de ce système, on reste toujours proche de ce point dans le futur.
- Un système est dit "asymptotiquement stable" si, en partant dans le voisinage d'un point d'équilibre de ce système, l'état va converger vers ce point d'équilibre en des temps très longs.
- Un système est dit instable s'il n'est pas stable.

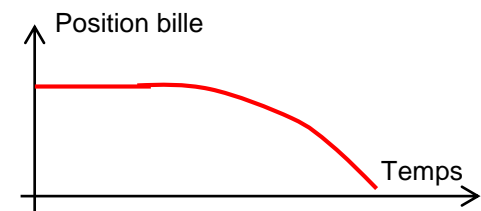
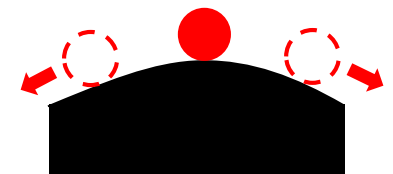
Exemple : équilibre d'une bille :



Système asymptotiquement stable



Système stable



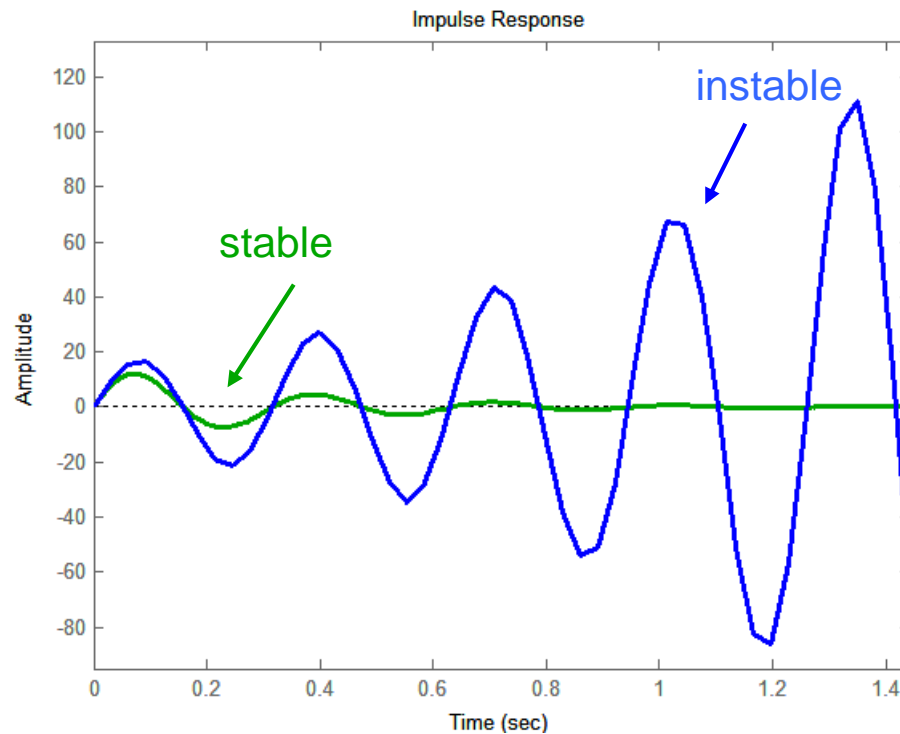
Système instable

Stabilité : définition

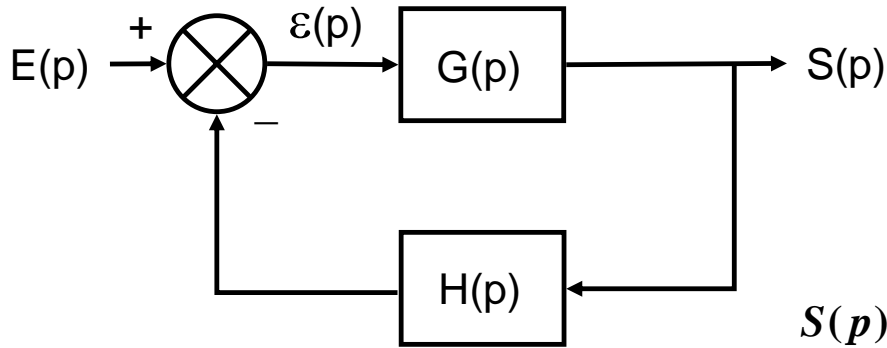
Définition :

un système sera dit stable si sa réponse impulsionnelle est absolument intégrable.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$



Stabilité : équation caractéristique



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)}$$



$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \prod_{i=1}^m (p + z_i)}{p^n \prod_{k=1}^r (p + \sigma_k) \prod_{j=1}^q (p^2 + 2\alpha_j p + (\alpha_j^2 + \omega_j^2))}$$

$$p^n \prod_{k=1}^r (p + \sigma_k) \prod_{j=1}^q (p^2 + 2\alpha_j p + (\alpha_j^2 + \omega_j^2)) = 0 \quad \text{est l'équation caractéristique}$$

La réponse impulsionnelle est alors (quand $n = 0$) :

$$s(t) = \sum_{k=1}^r A_k e^{-\sigma_k t} + \sum_{j=1}^q B_j \left(\frac{1}{\omega_j} \right) e^{-\alpha_j t} \sin(\omega_j t + \theta_m)$$

Les pôles de la FTBF doivent être à partie réelle négative

Stabilité : critère d'Edward John Routh (1831-1907)

Définition :

Ce critère énonce une condition nécessaire et suffisante pour que tous les pôles de la FTBF soient à partie réelle strictement négative. On suppose que l'équation caractéristique de la FTBF s'écrit sous une forme polynomiale.

(La FTBF est mise sous la forme $\frac{N(p)}{D(p)}$ où $N(p)$ et $D(p)$ sont deux polynômes en p)

Equation

caractéristique :

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$$

L'intérêt de ce critère est qu'il dispense de déterminer la valeur des zéros de l'équation caractéristique.

Remarque :

Quel que soit l'ordre, la positivité de tous les coefficients a_i est une condition nécessaire. Jusqu'à l'ordre 2, elle est suffisante.

Stabilité : critère de Routh (suite)

On dresse le tableau suivant jusqu'à l'obtention d'une ligne de 0 :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	- - - .	} Coefficients du polynôme caractéristique
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	- - - .	
b_1	b_2	b_3	b_4	- - - .	} Coefficients à calculer
c_1	c_2	c_3	c_4	- - - .	
					} Ligne de zéros
0	0	0	0		

Stabilité : critère de Routh (suite)

Calcul des coefficients b_i :

$$\begin{array}{cccc}
 a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
 & \times & & & \\
 a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots
 \end{array}$$

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$\begin{array}{cccc}
 b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0 & 0 &
 \end{array}$$

Stabilité : critère de Routh (suite)

Calcul des coefficients b_i :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	- - - -
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	- - - -
b_1	b_2	b_3	b_4	- - - -
c_1	c_2	c_3	c_4	- - - -
0	0	0	0	

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

Stabilité : critère de Routh (suite)

Calcul des coefficients b_i :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	- - - -
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	- - - -
b_1	b_2	b_3	b_4	- - - -
c_1	c_2	c_3	c_4	- - - -
0	0	0	0	

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

Stabilité : critère de Routh (suite)

Calcul des coefficients c_i :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	---
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	---
b_1	b_2	b_3	b_4	---
c_1	c_2	c_3	c_4	---
⋮	⋮	⋮	⋮	
0	0	0	0	

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1}$$

Stabilité : critère de Routh (suite)

Calcul des coefficients c_i :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	---
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	---
b_1	b_2	b_3	b_4	---
c_1	c_2	c_3	c_4	---
⋮	⋮	⋮	⋮	
⋮	⋮	⋮	⋮	
0	0	0	0	

$$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

⋮

$$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot b_3}{b_1}$$

Et ainsi de suite...

⋮

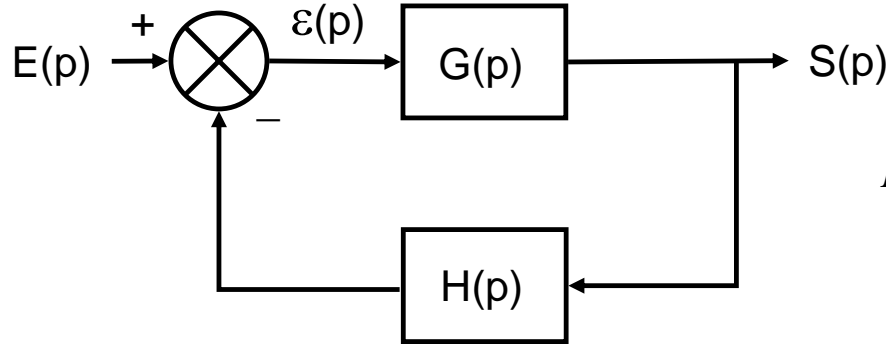
Stabilité : critère de Routh (suite)

Enoncé du critère :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	- - - - .	$b_1 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_n \cdot a_{n-3}}{a_{n-1}}$	$c_1 = \frac{b_1 \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_2}{b_1}$
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	- - - - .	$b_2 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_n \cdot a_{n-5}}{a_{n-1}}$	$c_2 = \frac{b_1 \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot b_3}{b_1}$
b_1	b_2	b_3	b_4	- - - - .	$b_3 = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-6} - a_n \cdot a_{n-7}}{a_{n-1}}$	Et ainsi de suite...
c_1	c_2	c_3	c_4	- - - - .	a_{n-1}	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0	0	0	0	0	0	0

Les zéros de l'équation $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0$ sont à partie réelle strictement négative si et seulement si les termes de la première colonne sont tous de même signe.

Stabilité : critère de Routh (exemple)



$$FTBF = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{p^3 + 0,5p^2 + 3p + 3,5}$$

$a_3 = 1$	$a_1 = 3$	0
$a_2 = 0,5$	$a_0 = 3,5$	0
$b_1 = -4$	$b_2 = 0$	0
$c_1 = 3,5$	$c_2 = 0$	0
0	0	0

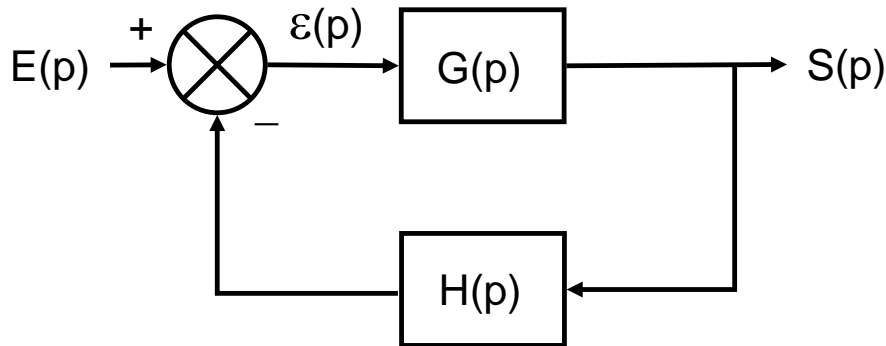
Les éléments de la première colonne ne sont pas tous positifs, ce système bouclé est instable.

Remarque :

Tous les coefficients a_i sont positifs (condition nécessaire mais pas suffisante)

Stabilité : critère de Harry Nyquist (1889-1976)

Il n'est pas toujours possible d'appliquer le critère de Routh (par exemple, si le système en BO possède un retard pur). On va donc s'intéresser à une propriété remarquable du lieu de Nyquist d'un système en BO qui permet une analyse de la stabilité du **système en BF** à partir de la **FTBO**.



$$FTBO = G(p)H(p)$$

$$FTBF = \frac{G(p)}{1 + G(p)H(p)} = \frac{G(p)}{1 + FTBO}$$

Il y a instabilité lorsque : $1 + FTBO = 0$ ou encore : $FTBO = -1$

Stabilité : critère de Nyquist

Enoncé du critère de Nyquist :

Pour qu'un système soit stable en BF, il faut et il suffit, lorsque « p » décrit le contour de Nyquist que le lieu de sa FTBO effectuée autour du point critique un nombre de tours N égal au nombre de pôles P à partie réelle strictement positive de cette FTBO.

Remarques :

- Le contour de Nyquist englobe le demi-plan complexe positif (de droite) :
 - d'une droite recouvrant l'axe des imaginaires purs
 - d'un demi-cercle de rayon $r \rightarrow \infty$ partant de $0 + j\omega$ et orienté dans le sens des aiguilles d'une montre vers le point d'affixe $0 - j\omega$
- Si la FTBO comporte un ou plusieurs pôles imaginaires purs, le lieu de cette FTBO comporte des branches infinies et devra donc être complété à l'infini sur la droite.

Stabilité : critère de Nyquist (exemple 1)

$$FTBO = \frac{200}{(p-1)(p+10)^2}$$



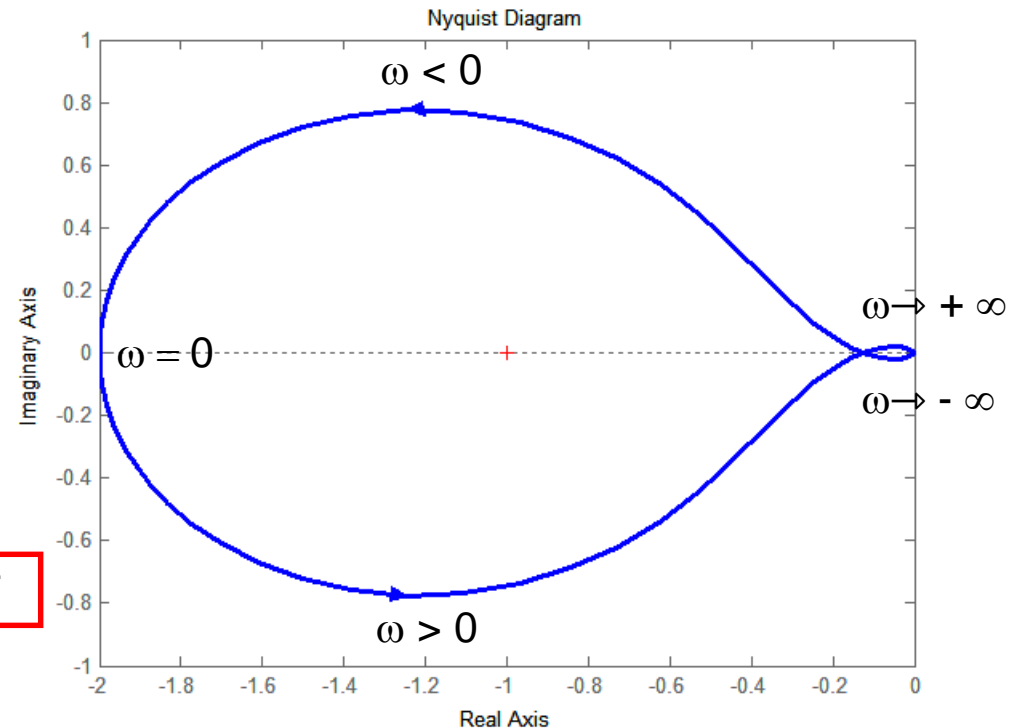
Un pôle à partie réelle strictement positive

$$p_1 = 1 \text{ donc } P = 1$$

Le lieu de la FTBO n'a pas besoin d'être complété.

Il fait **un tour** autour du point critique $(-1,0)$, dans le sens trigonométrique donc $N = 1$

$N = P$: le système est stable en BF



Stabilité : critère de Nyquist (exemple 2)

$$FTBO = \frac{K}{p(1-\tau p)} \quad \text{avec } \tau > 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Un p\^ole \u00e0 partie r\u00e9elle strictement positive}$$

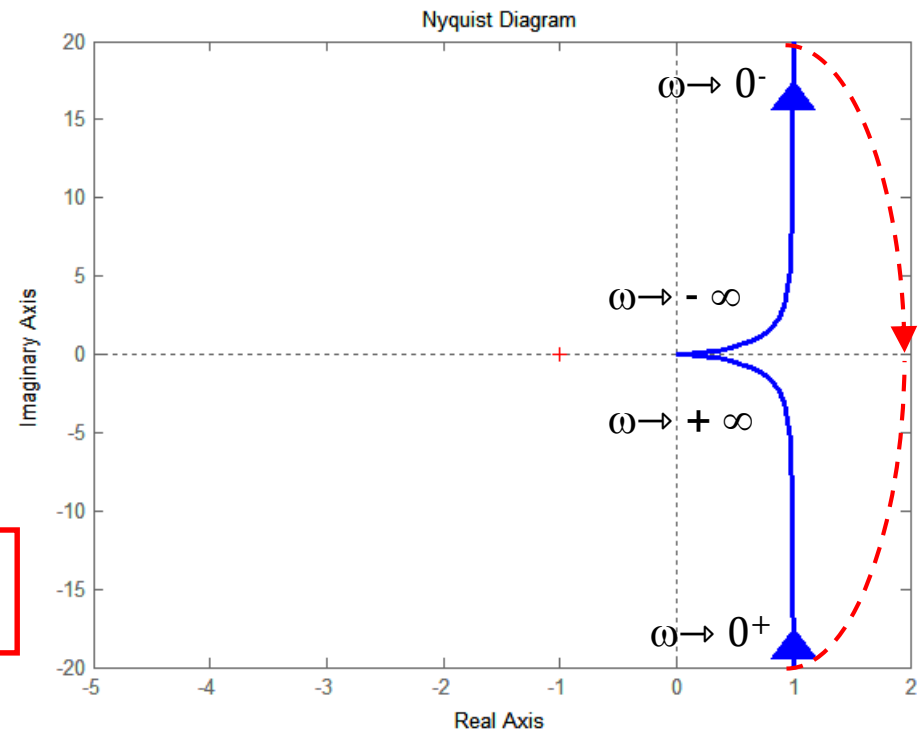
$$p_1 = 1 / \tau \quad \text{donc } P = 1$$

Le lieu de la FTBO poss\u00e8de une asymptote verticale en 0

Le lieu de la FTBO doit \u00eatre compl\u00e9t\u00e9 dans le sens des aiguilles d'une montre (compl\u00e9ment indiqu\u00e9 en rouge)

Le lieu de la FTBO n'entoure pas point critique (-1,0) donc $N = 0$

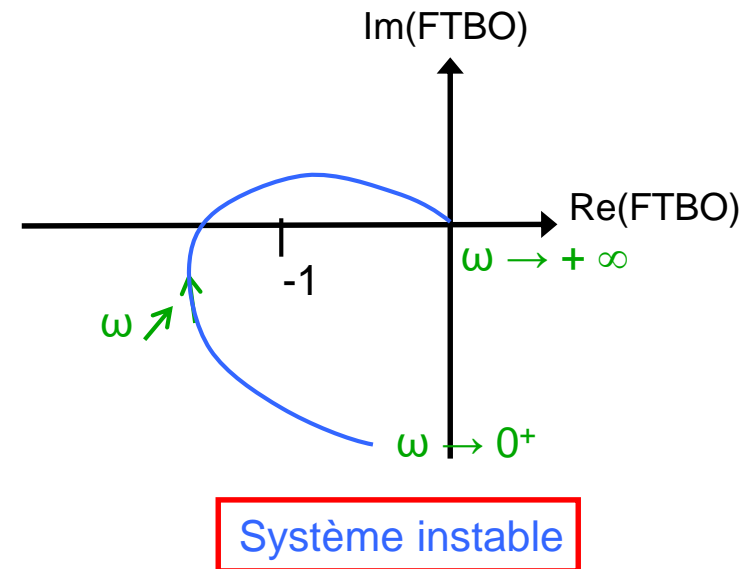
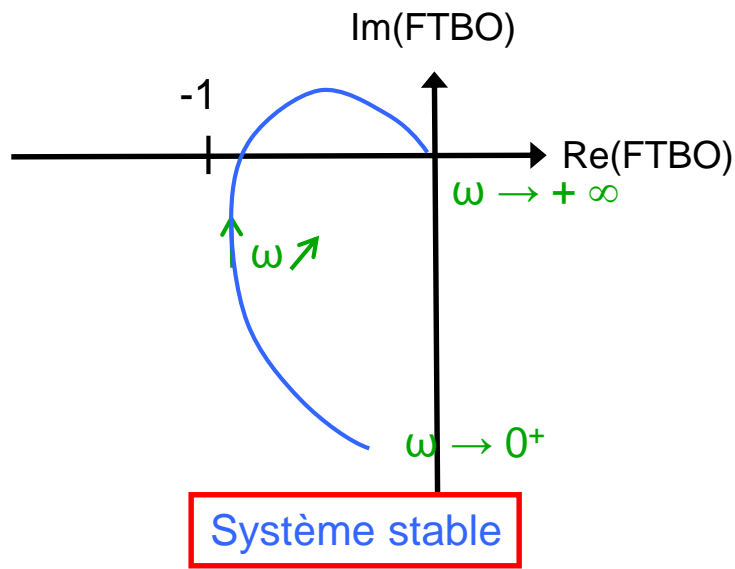
$N \neq P$: le syst\u00e8me est instable en BF pour toutes les valeurs de K



Stabilité : critère du revers (1/2)

Enoncé du critère à partir du diagramme de Nyquist :

Un système stable en BO sera stable en BF si en parcourant le lieu de sa FTBO dans le sens des ω croissants (de 0 à $+\infty$), on laisse le point critique $(-1,0)$ à gauche de ce lieu.

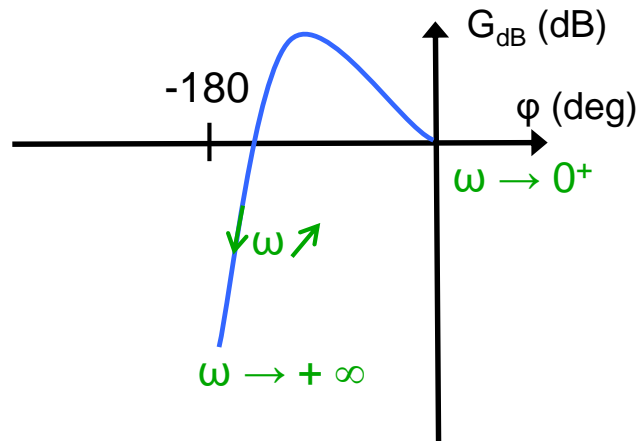


Ce critère n'est applicable que dans le cas où la FTBO **ne possède pas** de pôle à partie réelle strictement positive (**système stable en BO**).

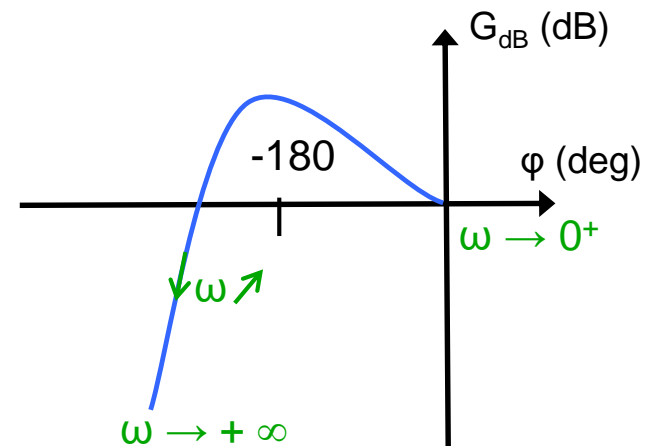
Stabilité : critère du revers (2/2)

Enoncé du critère à partir du diagramme de Nichols :

Un système stable en BO sera stable en BF, si en parcourant le **lieu** de sa FTBO dans le sens des ω croissants (de 0 à $+\infty$), on laisse le point critique ($0\text{dB}, -180^\circ$) **à droite** de ce lieu.



Système stable en BF



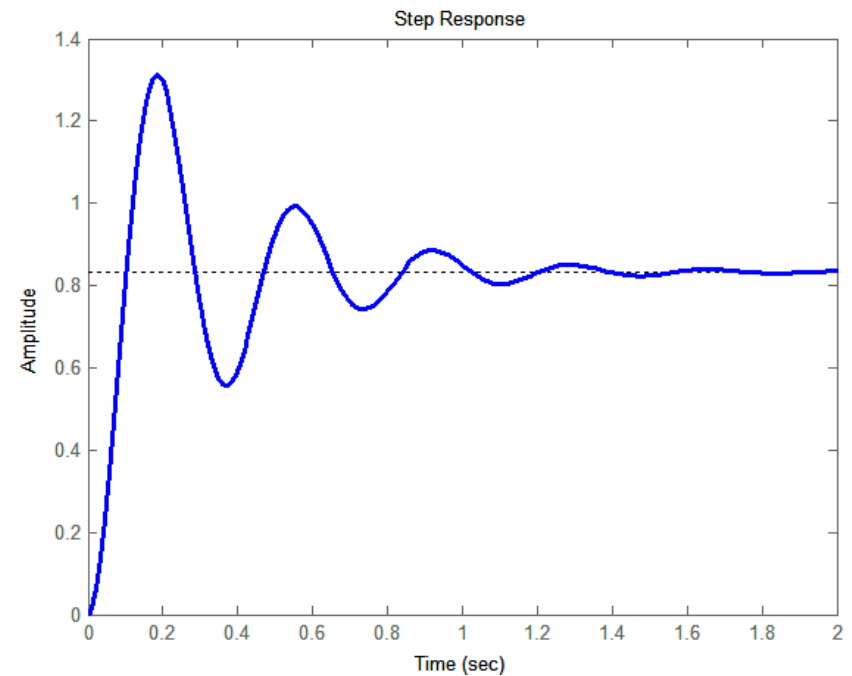
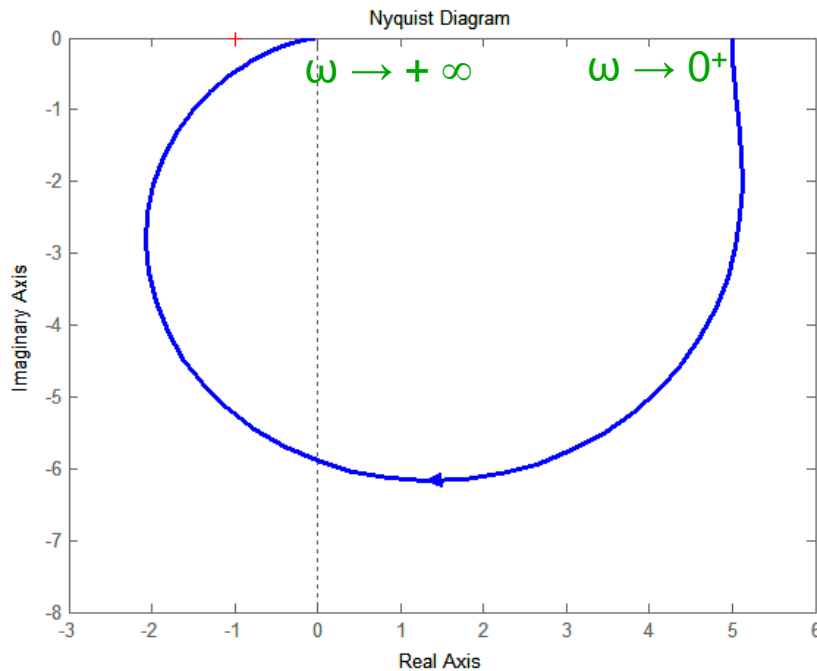
Système instable en BF

Ce critère n'est applicable que dans le cas où la FTBO **ne possède pas** de pôle à partie réelle strictement positive (**système stable en BO**).

Notion de degré de stabilité

Dans la pratique, s'assurer de la stabilité d'un système bouclé n'est pas suffisant. En effet, si le lieu de sa FTBO passe trop près du point critique, sa réponse indicielle sera mal amortie.

Exemple (critère du revers) :

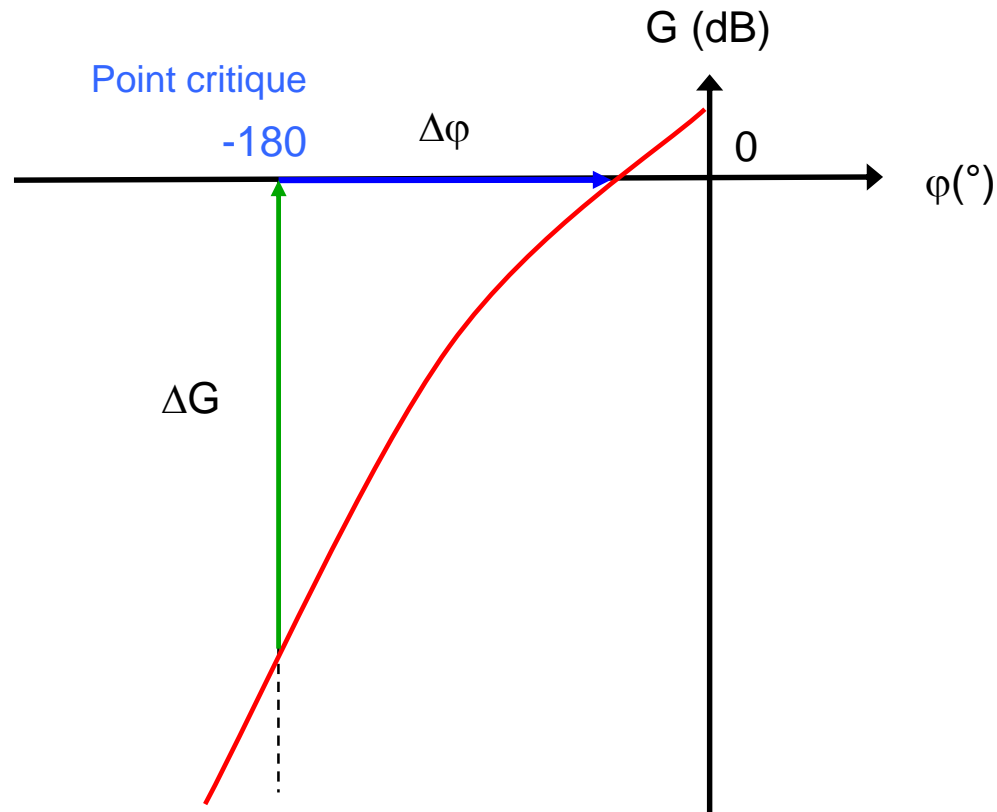


➔ Notion de marges de sécurité interdisant un voisinage immédiat du point critique ((-1,0) dans le plan de Nyquist et (0,-180) dans le plan de Nichols) :

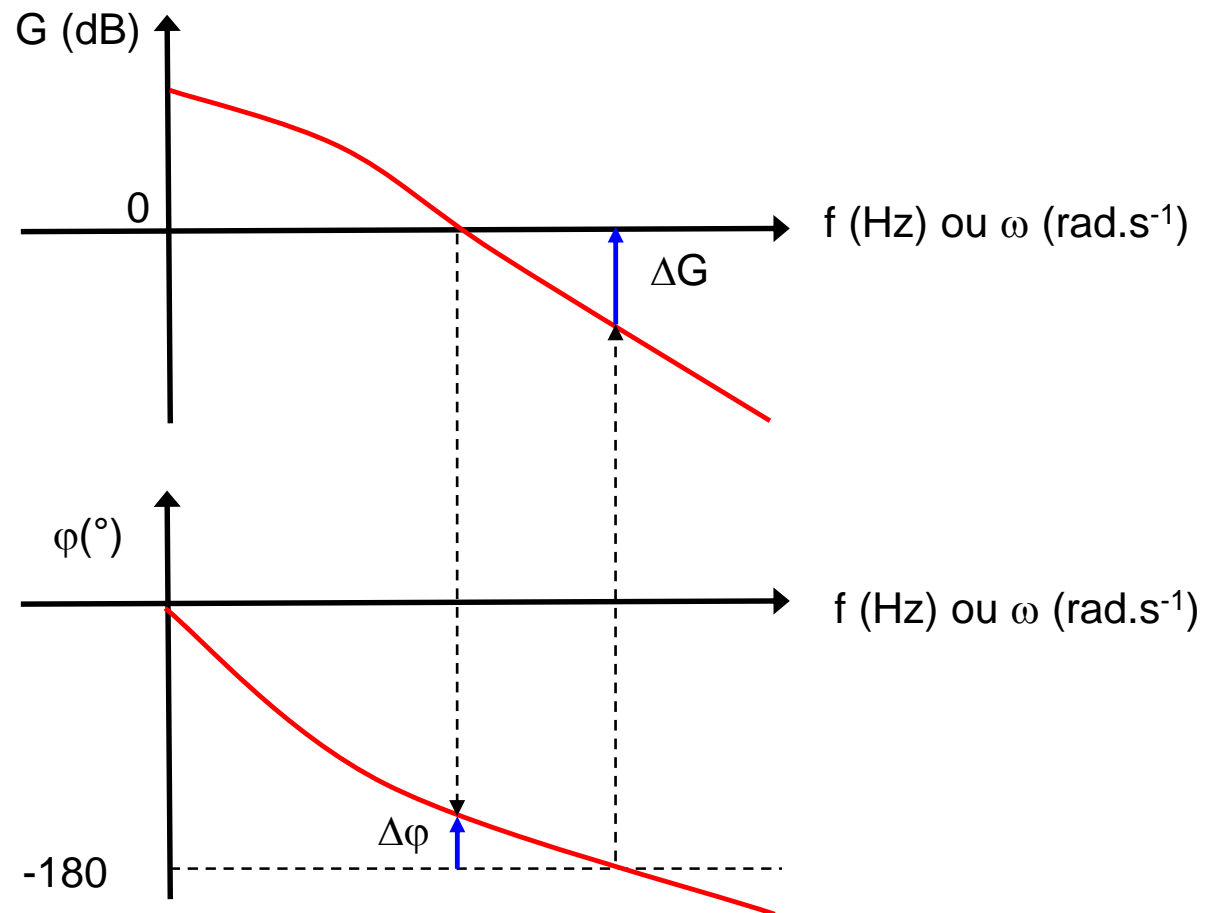
Marge de gain et marge de phase

Représentation des marges de gain et de phase dans le diagramme de Nichols

Le point critique $(-1,0)$ est défini par un module unité et un argument de $-\pi$



Représentation des marges de gain et de phase dans les diagrammes d'Hendrik Wade Bode (1905-1982)



Représentation des marges de gain et de phase dans le diagramme de Nyquist

Le point M est défini par l'intersection du lieu de Nyquist de la FTBO avec le cercle centré à l'origine et de rayon unité.

Le point N est défini par l'intersection du lieu de Nyquist avec le demi-axe des réels négatifs.

La marge de phase $\Delta\varphi$ est l'angle orienté :

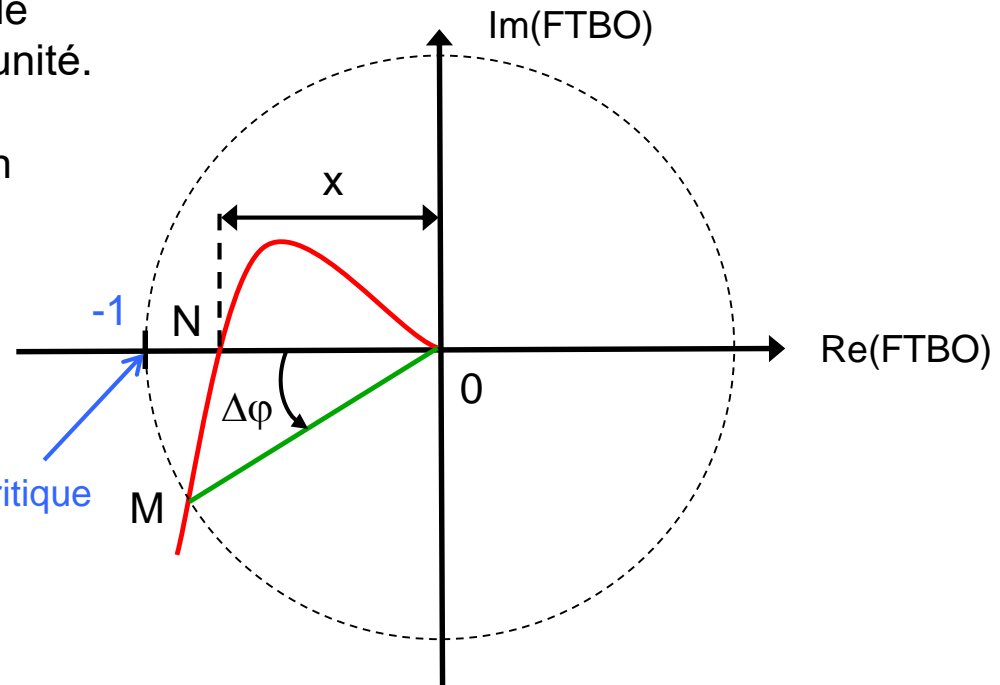
$$\left(\vec{ON}, \vec{OM} \right)$$

Point critique

La marge de gain ΔG (en dB) est :

$$\Delta G = 0 - 20 \log x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta G = 20 \log \frac{1}{x} \quad \text{où} \quad x = \left\| \vec{ON} \right\|$$



Définition des marges de gain et de phase

La marge de phase représente le déphasage supplémentaire qui peut être introduit dans le système bouclé pour l'amener à l'instabilité. Elle est exprimée en radian ou en degré.

$$\Delta\varphi = \arg(FTBO(j\omega_c)) + 180^\circ \quad \text{avec} \quad 20\log(|FTBO(j\omega_c)|) = 0\text{dB}$$

La marge de gain représente le gain supplémentaire qui peut être introduit dans le système bouclé pour l'amener à l'instabilité. Elle est exprimée en dB.

$$\Delta G = -20\log(|FTBO(j\omega_\pi)|) \quad \text{avec} \quad \arg(FTBO(j\omega_\pi)) = -\pi$$

En pratique :

pour qu'un système bouclé soit bien amorti, les marges de gain et de phase doivent avoir des valeurs supérieures à certaines valeurs minimales.

$$\Delta\varphi_{\min} = 45 \text{ à } 50^\circ \quad \Delta G = 8 \text{ à } 10 \text{ dB}$$

En général, il suffit d'affaiblir le gain pour améliorer le degré de stabilité.

Chapitre 3

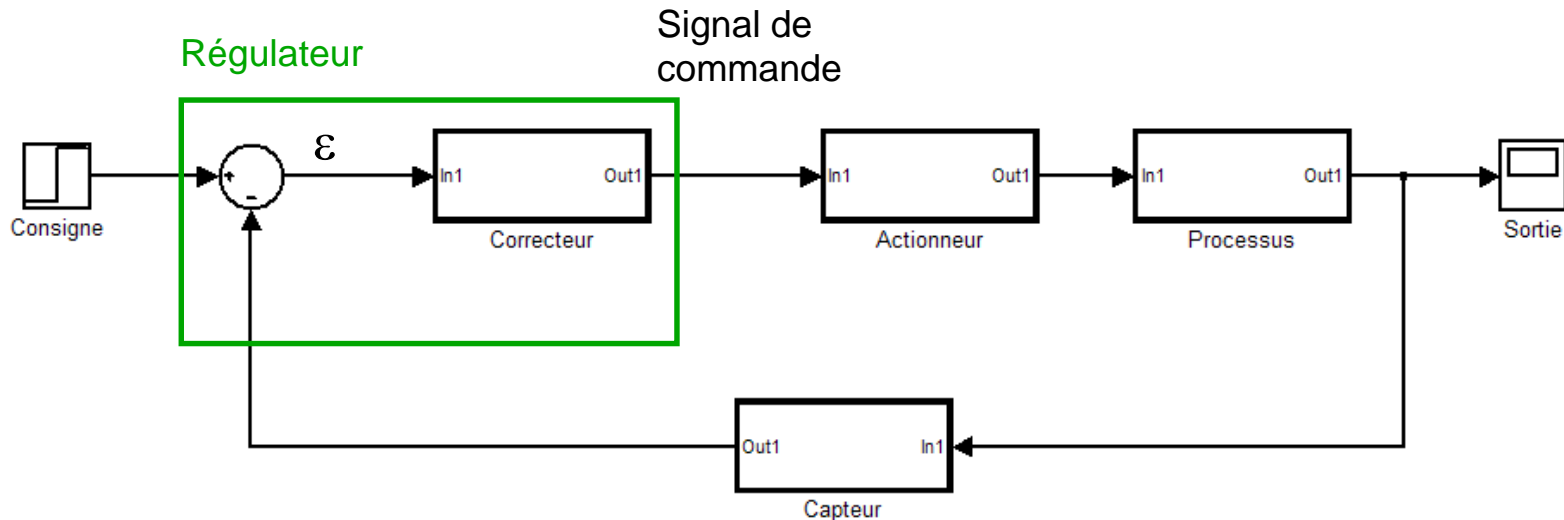
Synthèse de correcteurs à actions élémentaires

Chapitre 3 : Acquis d'apprentissage visés

Etre capable, à l'issue du chapitre, de :

- Expliquer le rôle des actions élémentaires P, I et D
- Régler les paramètres d'un correcteur PID
- Régler les paramètres d'un correcteur à avance / retard de phase
- Appliquer le prédicteur de Smith aux systèmes à retard

Introduction



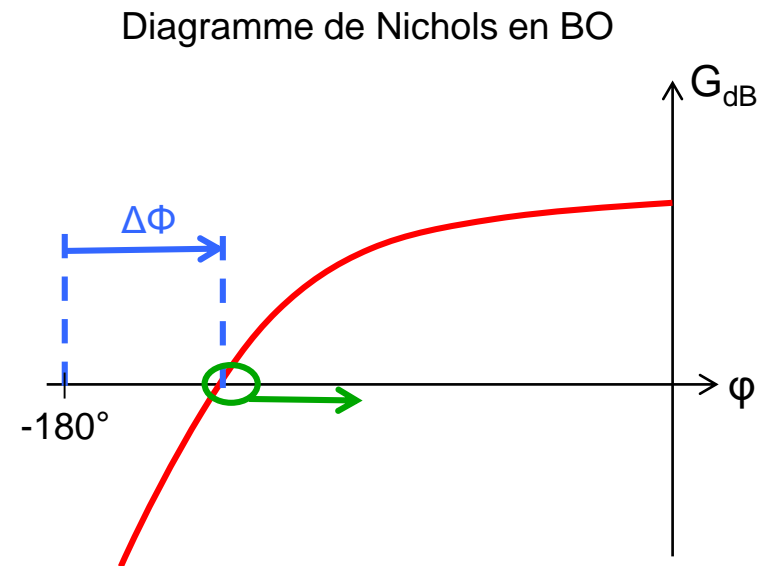
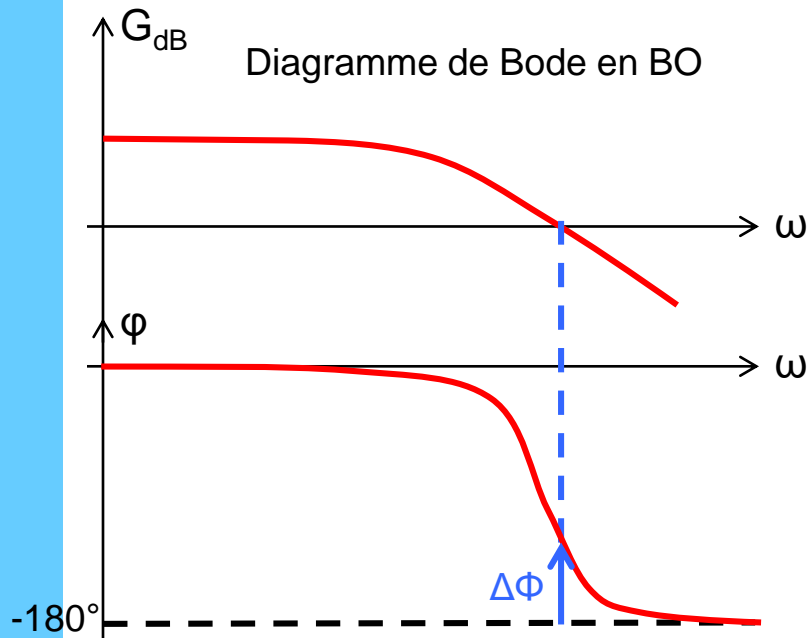
Il existe 3 actions correctives élémentaires qui permettent, individuellement, de corriger telle ou telle performance. Elles sont relativement simples à réaliser mais, en général, dégradent d'autres performances. Elles sont utilisables lorsque le cahier des charges est peu exigeant. Dans le cas contraire, il faut envisager de les combiner au sein d'un correcteur plus complexe...

Analyse de la stabilité dans le domaine fréquentiel

La stabilité d'un système en BF est liée à sa marge de phase en BO

Plus la marge de phase $\Delta\Phi$ d'un système en BO est grande, plus sa réponse indicielle sera amortie durant le régime transitoire.

Remarque : Un système qui a une marge de gain ou une marge de phase négative est un système instable en BF.



Analyse de la rapidité dans le domaine fréquentiel

La rapidité d'un système est liée à la largeur de sa bande passante en BO :

Plus la bande passante en BO est large, plus le système est rapide en BF.

Bande passante = $[0 ; \omega_c]$ = Bande sur laquelle :

$$G_{dB}(\omega) \geq 0 \text{ dB}$$

ω_c est la pulsation du point de gain nul :

$$G_{dB}(\omega_c) = 0 \text{ dB}$$

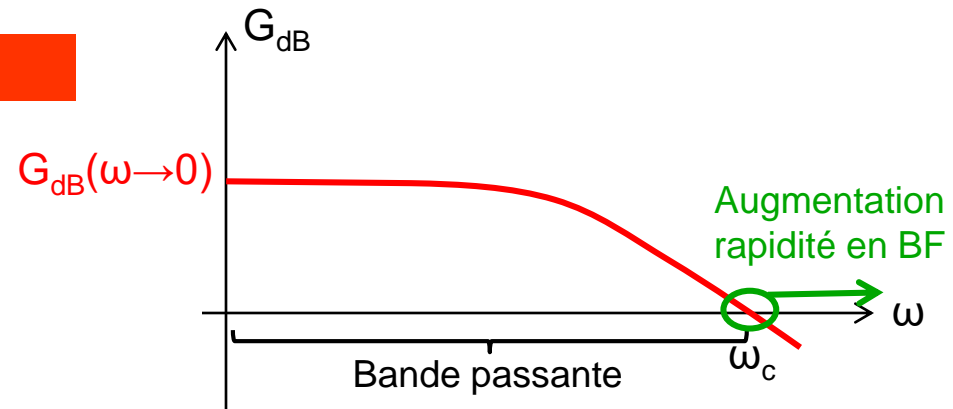


Diagramme de Bode (gain) en BO

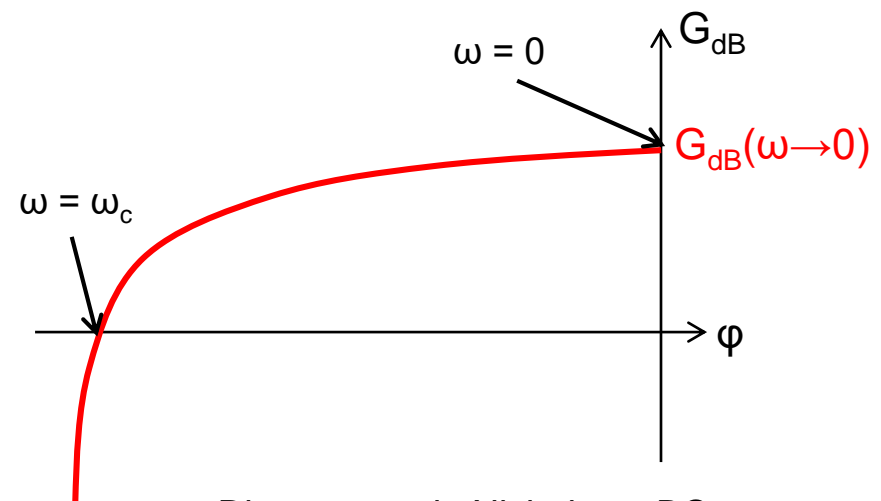


Diagramme de Nichols en BO

Analyse de la précision dans le domaine fréquentiel

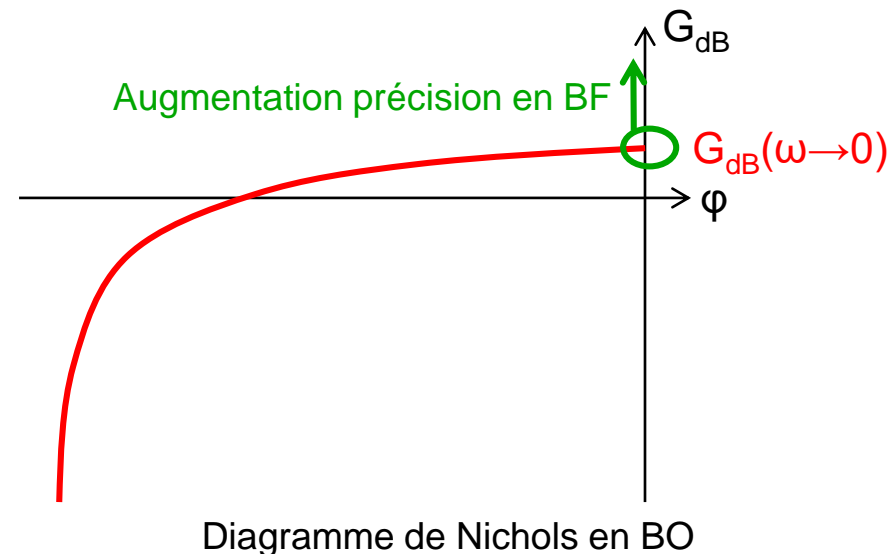
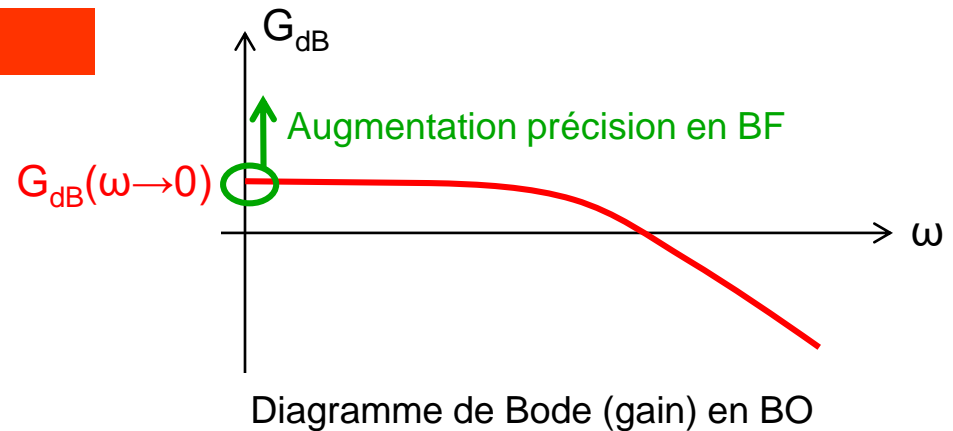
Pour un système du 1^{er} ordre ou du 2^{ème} ordre,

plus le gain statique en BO est élevé, plus le système est précis en BF.

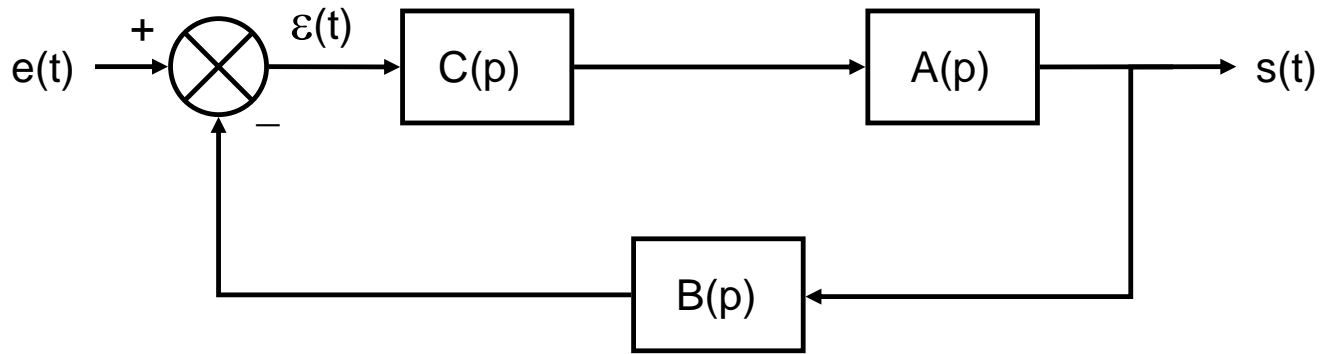
Ceci est également vrai pour les systèmes d'ordre supérieur.

Pour avoir un système précis à 100% en BF, il faut que le gain statique en BO tende vers l'infini

Sur diagrammes de Bode et Nichols : Gain statique = gain pour $\omega \rightarrow 0$



Notations



Sans correcteur en BO:

$$FTBO_{nc}(p) = A(p)B(p)$$

Sans correcteur en BF:

$$FTBF_{nc}(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

Avec correcteur en BO :

$$FTBO_c(p) = C(p)A(p)B(p)$$

Avec correcteur en BF :

$$FTBF_c(p) = \frac{C(p)A(p)}{1 + C(p)A(p)B(p)}$$

Correcteur proportionnel (1/2)

$$C(p) = K$$

A pour action de modifier le gain statique initial du système

En BO non corrigée :

$$G_{nc(dB)} = 20 \log |FTBO_{nc}(\omega)|$$

$$\varphi_{nc}(\omega) = \arg(FTBO_{nc}(\omega))$$

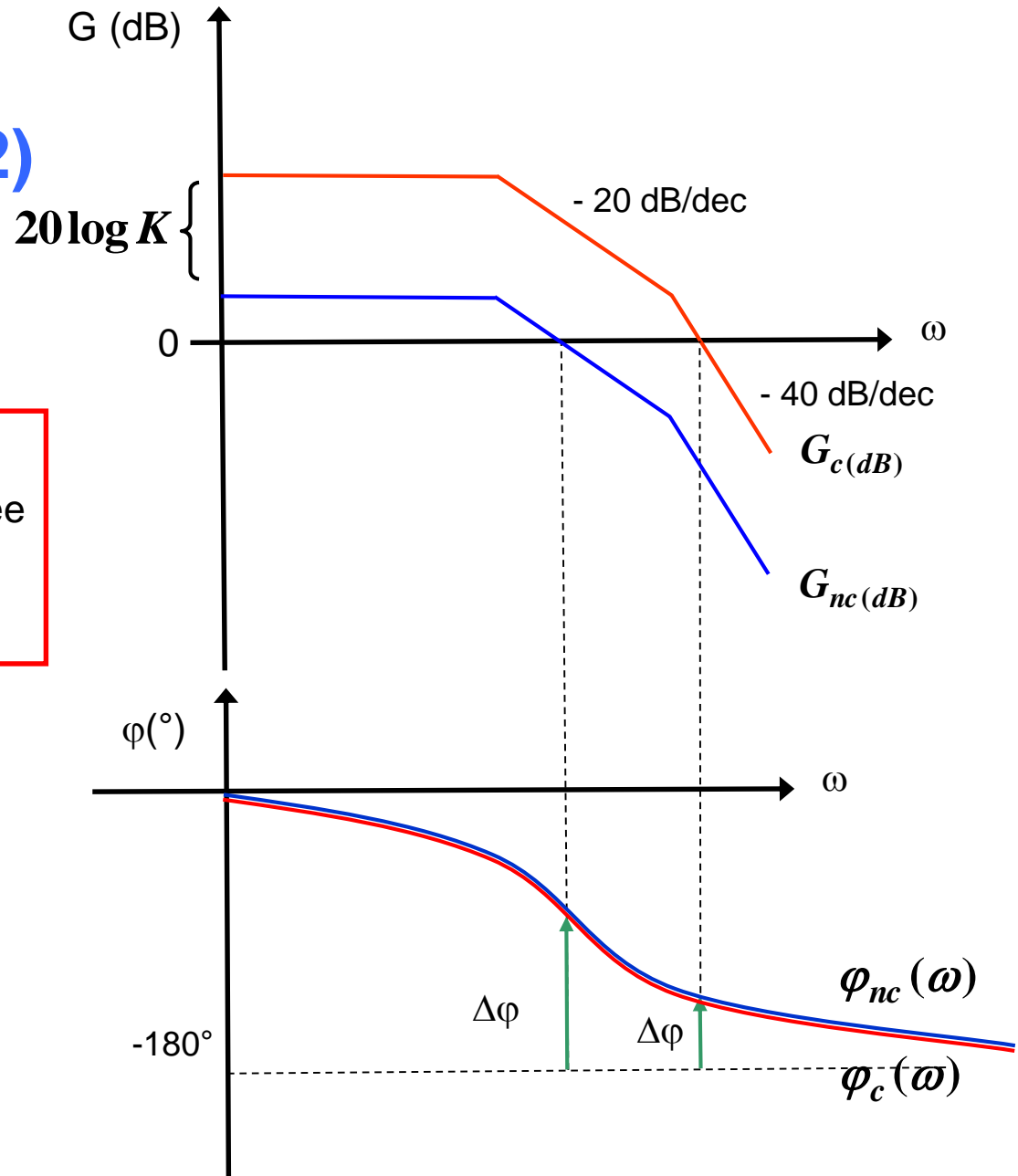
En BO corrigée :

$$G_{c(dB)} = G_{nc(dB)} + 20 \log K$$

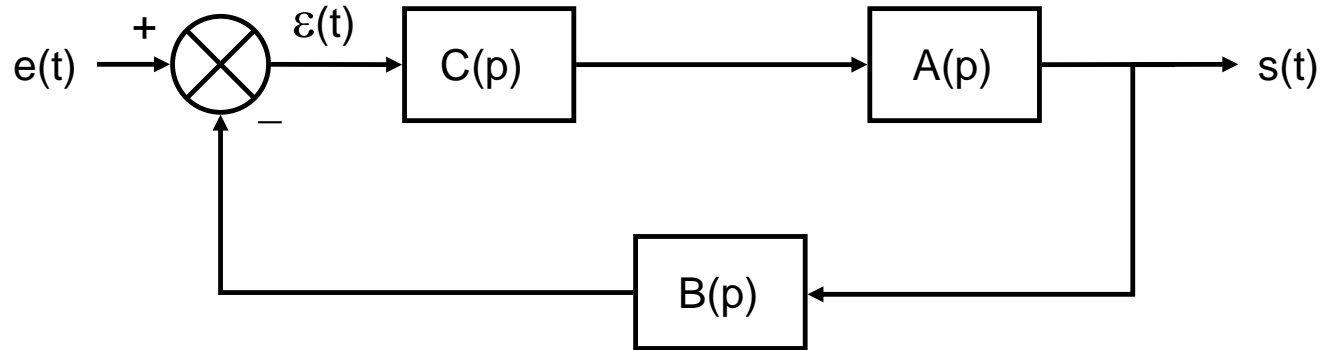
$$\varphi_c(\omega) = \varphi_{nc}(\omega)$$

Correcteur proportionnel (2/2)

On passe de la courbe de gain initiale $G_{nc}(dB)$ à la courbe corrigée en ajoutant à chaque segment le gain $20 \log(K)$.



Correcteur proportionnel : exemple (1/4)



$$C(p) = 3$$

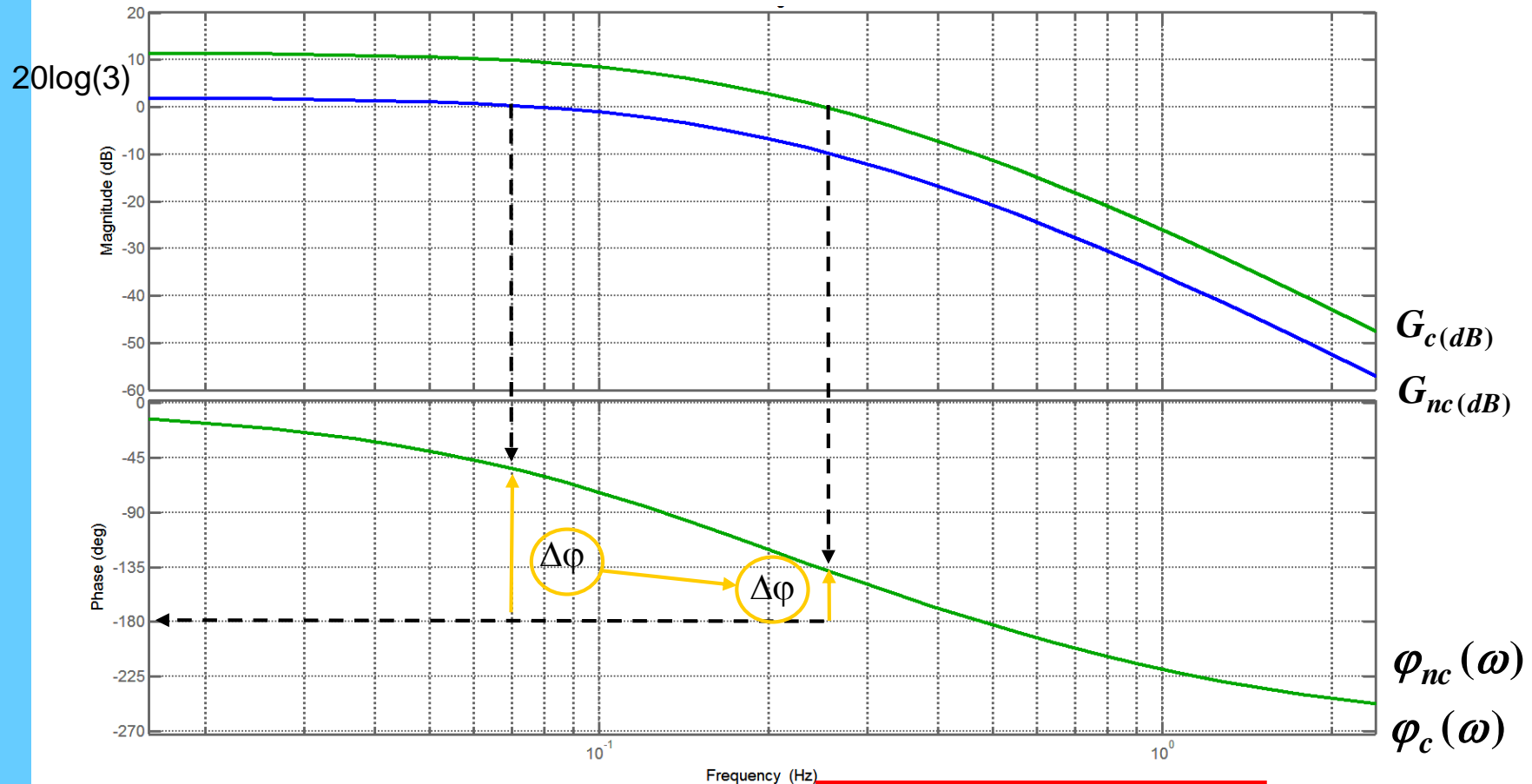
$$A(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 9p + 4}$$

$$B(p) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} FTBO_{nc}(p) = \frac{1}{p^3 + 6p^2 + 9p + 4} \\ FTBO_c(p) = \frac{3}{p^3 + 6p^2 + 9p + 4} \end{array} \right.$$

Correcteur proportionnel : exemple (2/4)

Diagrammes de Bode

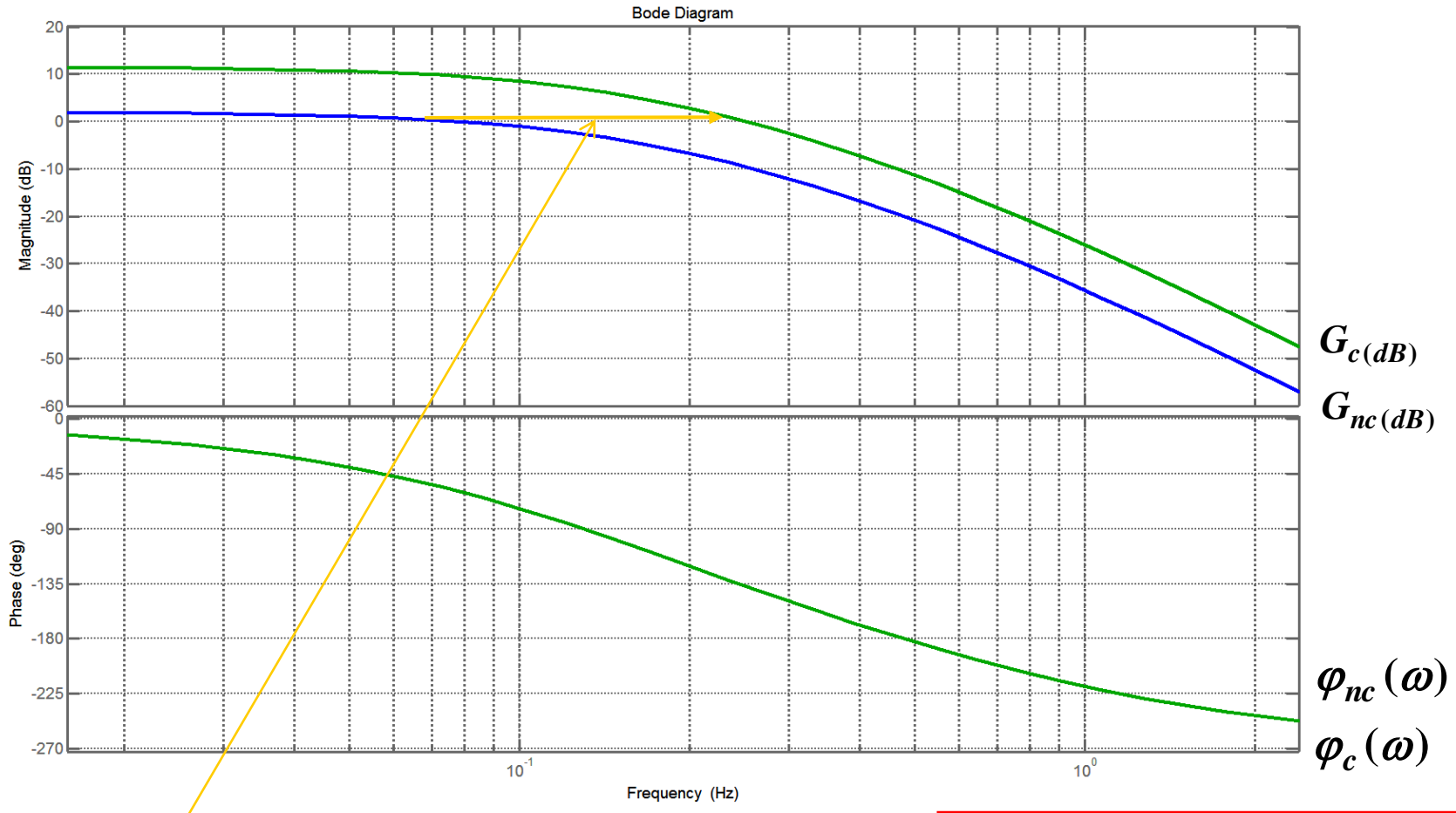


Diminution de la
marge de phase



Le système corrigé sera
moins stable en BF

Correcteur proportionnel : exemple (2/4)



Augmentation de la pulsation du point de gain nul

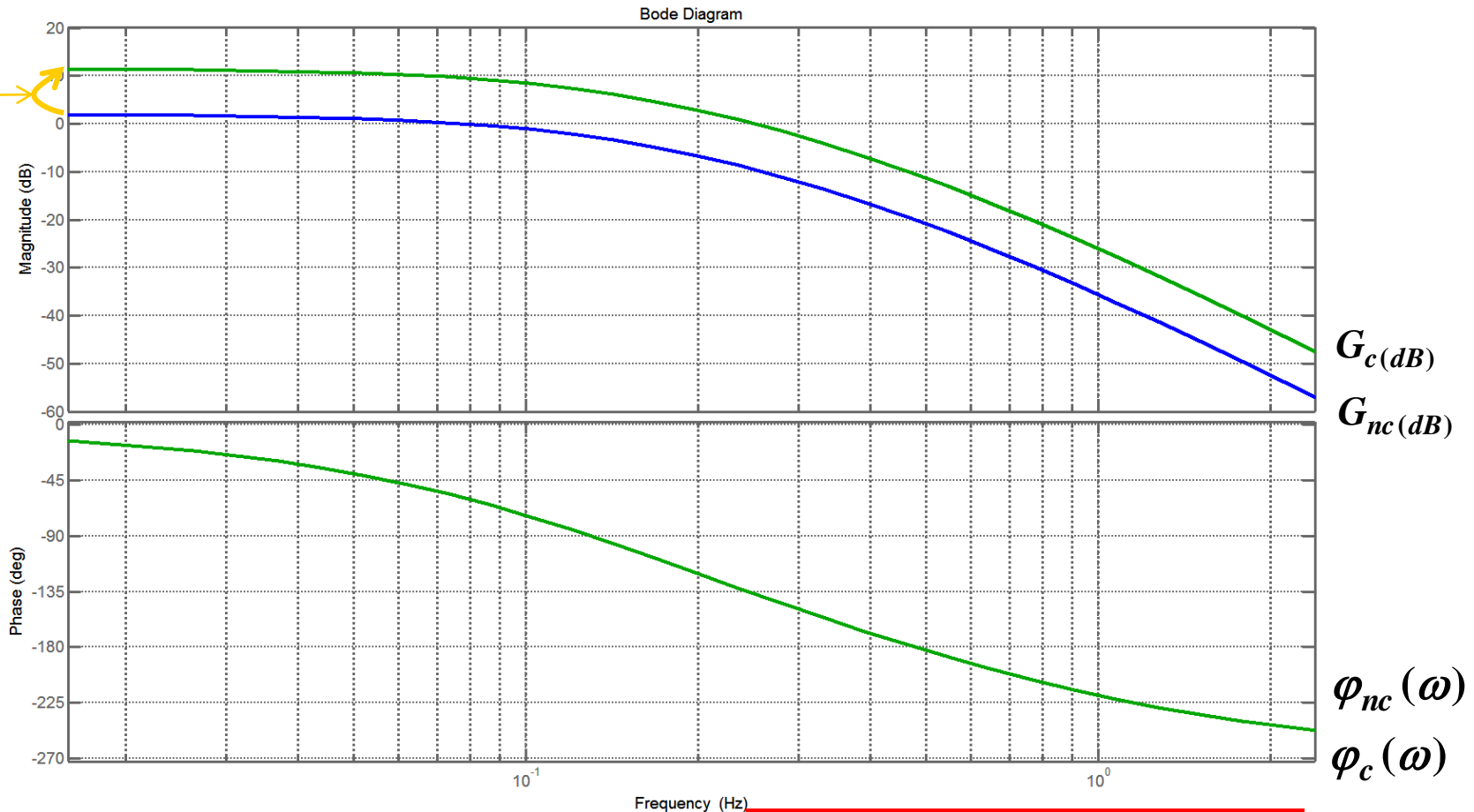


Augmentation de La bande passante



Le correcteur aura tendance à accélérer le système en BF

Correcteur proportionnel : exemple (2/4)

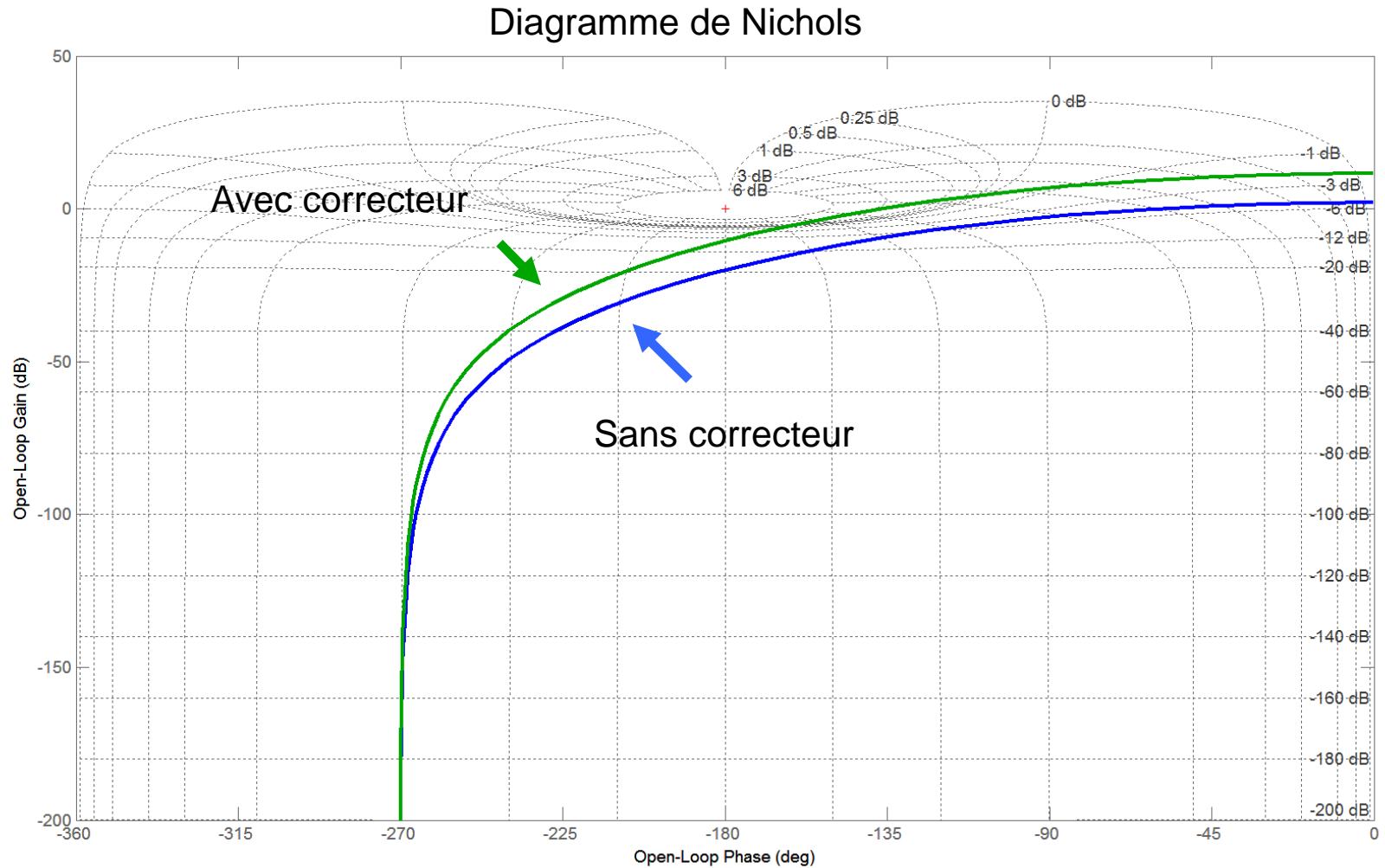


Augmentation du gain statique



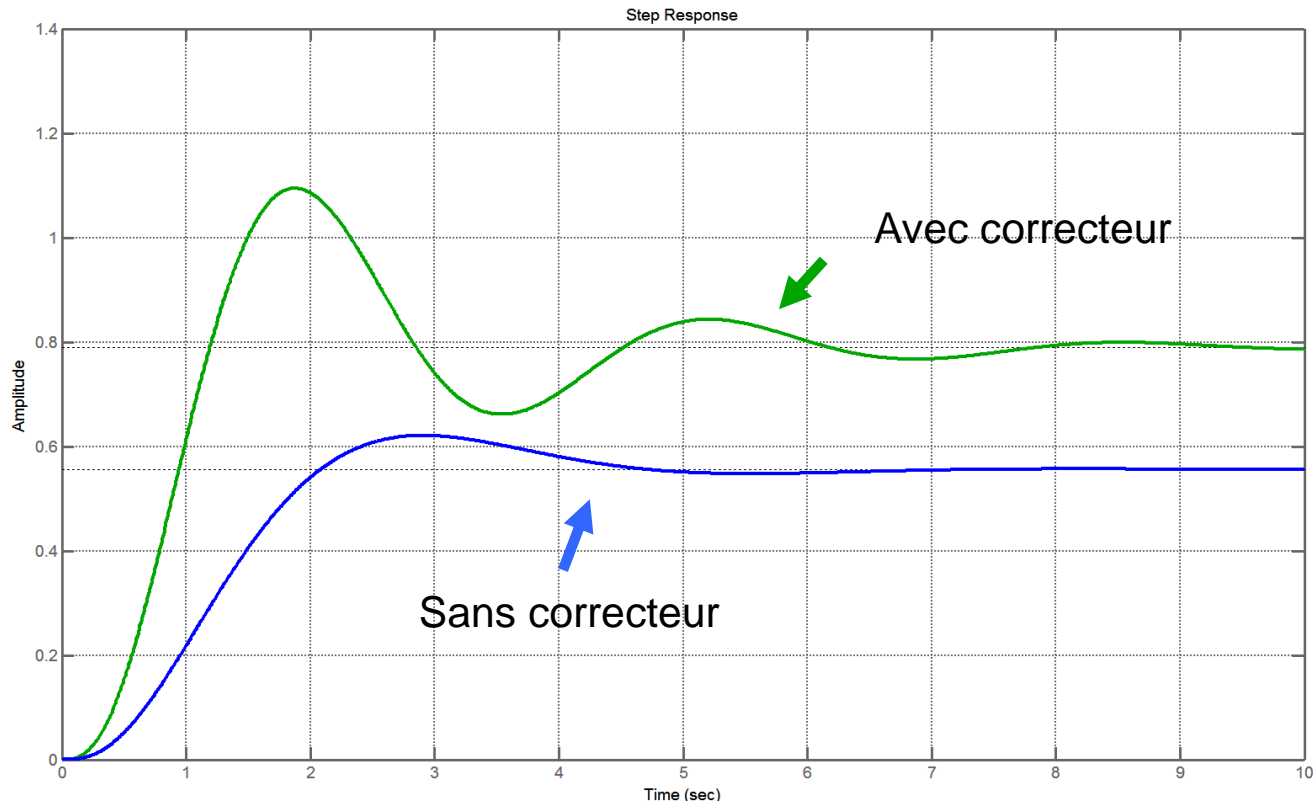
Le correcteur aura tendance à augmenter la précision en BF

Correcteur proportionnel : exemple (3/4)



Correcteur proportionnel : exemple (4/4)

Réponse indicielle du système en boucle fermée :



On améliore la rapidité et la précision du système en BF mais on diminue la stabilité (ce qui peut aller jusqu'à le rendre instable) et on accroît son dépassement.

Correcteur intégral (1/4)

$$C(p) = \frac{1}{p}$$

Le correcteur ajoute un pôle nul à la FTBO \rightarrow Erreur de position nulle en BF

A pour action d'améliorer la précision du système asservi

En BO non corrigée :

$$G_{nc(dB)} = 20 \log |FTBO_{nc}(\omega)|$$

$$\varphi_{nc}(\omega) = \arg(FTBO_{nc}(\omega))$$

En BO corrigée :

$$G_c(dB) = G_{nc(dB)} - 20 \log |\omega|$$

$$\varphi_c(\omega) = \varphi_{nc}(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

Correcteur intégral (2/4)

Action sur le gain :

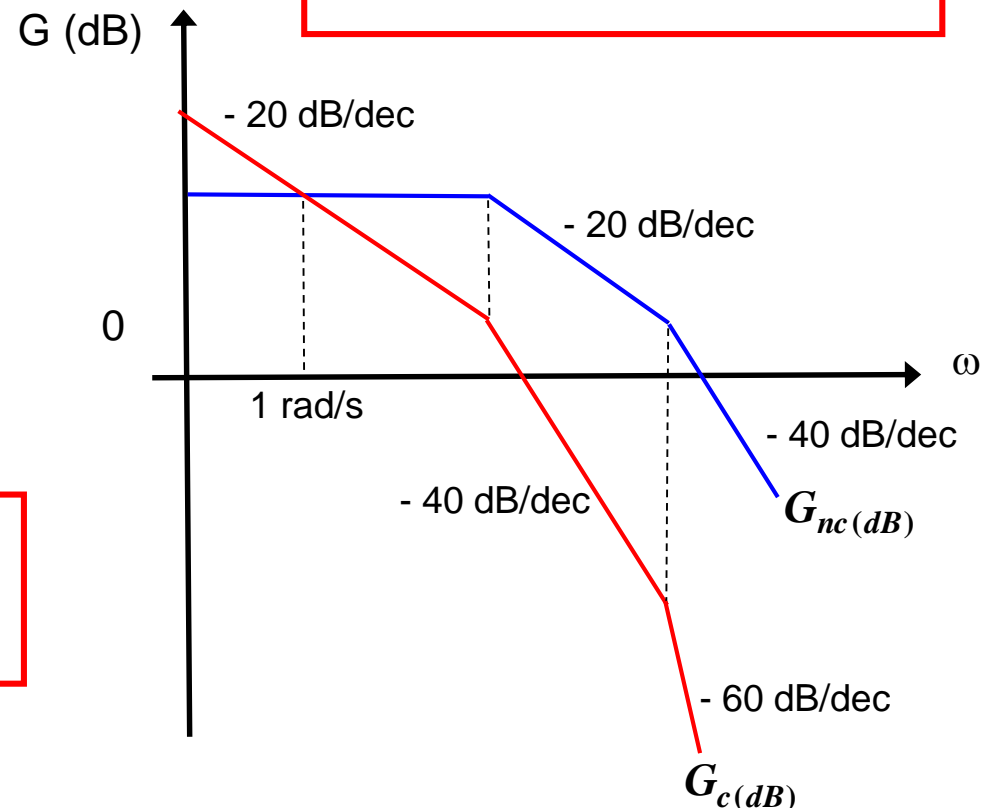
$$G_{nc(dB)} = 20 \log |FTBO_{nc}(\omega)|$$



$$G_c(dB) = G_{nc(dB)} - 20 \log |\omega|$$

On passe de la courbe de gain initiale $G_{nc(dB)}$ à la courbe corrigée en retranchant à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente 20 dB / dec.

Le gain statique est augmenté (jusqu'à l'infini), le système en BF corrigé sera plus précis (à 100%)



Correcteur intégral (3/4)

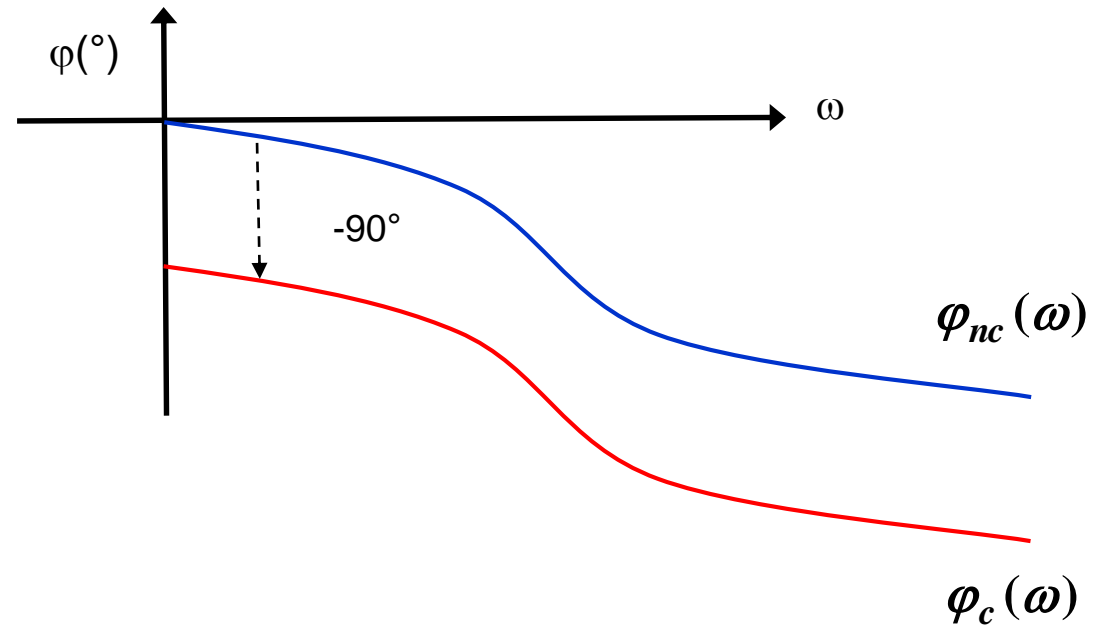
Action sur la phase :

$$\varphi_{nc}(\omega) = \arg(FTBO_{nc}(\omega))$$



$$\varphi_c(\omega) = \varphi_{nc}(\omega) - \frac{\pi}{2}$$

Le diagramme de phase est
translaté de $\pi / 2$ vers le bas.



Correcteur intégral (4/4)

Diminution de la pulsation du point de gain nul



Augmentation du temps de montée

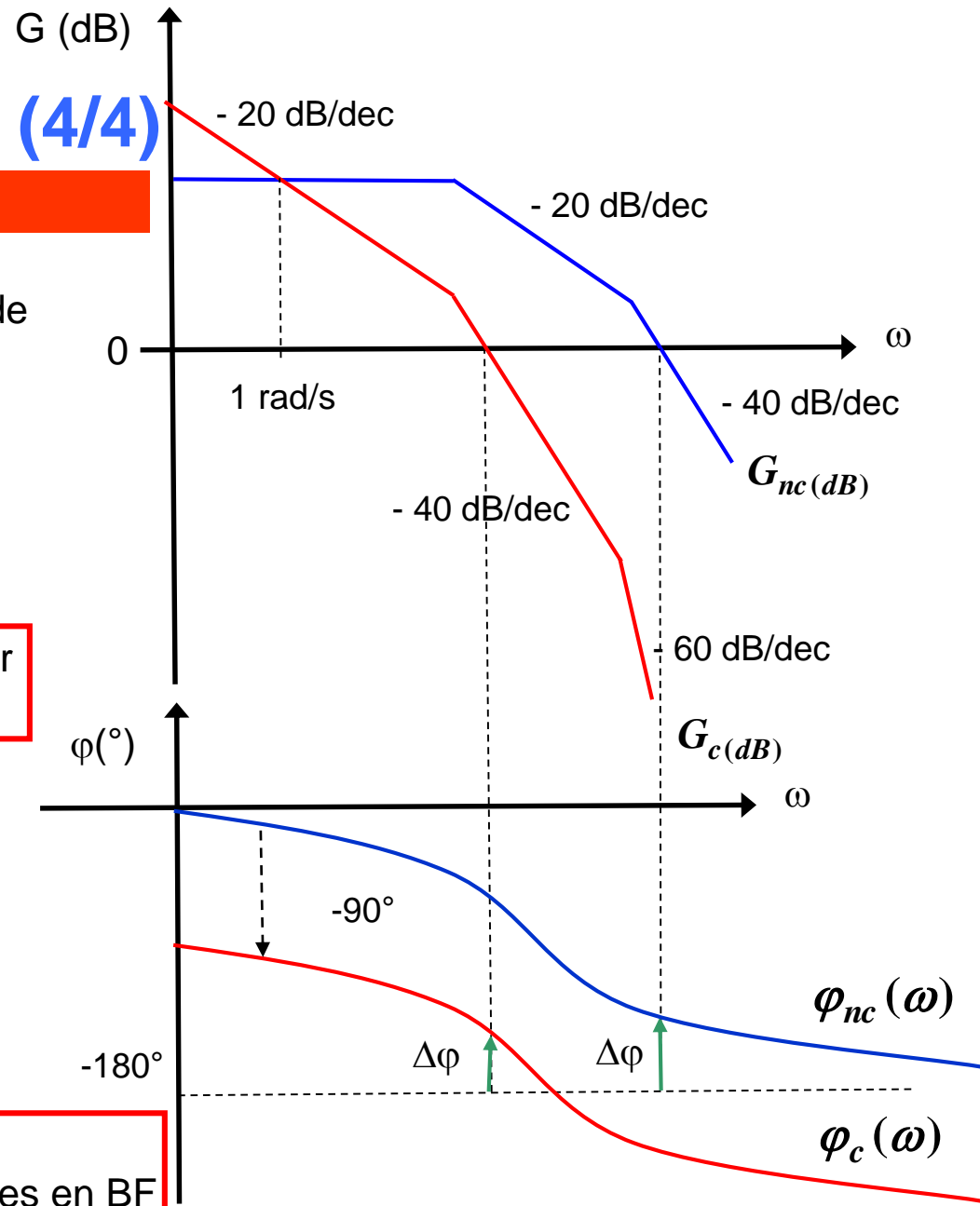


L'intégrateur aura tendance à ralentir le système en BF

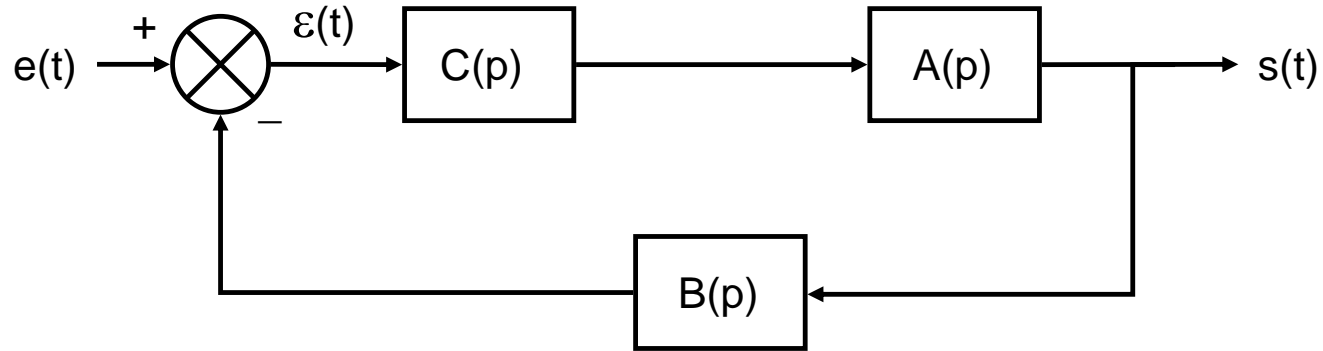
La marge de phase est changée et est susceptible de se retrouver près de 0° :



La stabilité et la limitation du dépassement s'en trouvent dégradées en BF



Correcteur intégral : exemple (1/3)



$$C(p) = \frac{1}{p}$$

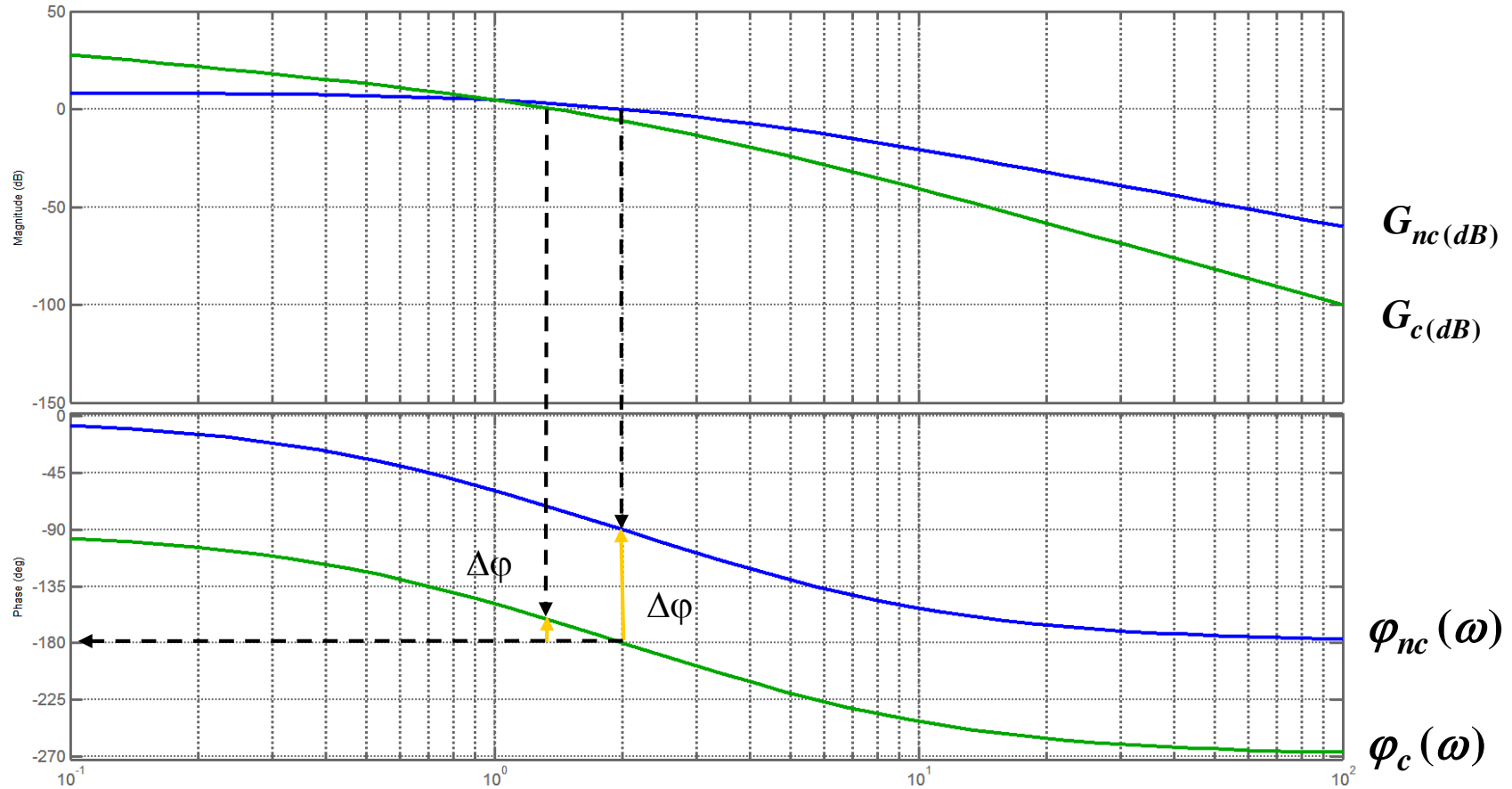
$$A(p) = \frac{10}{p^2 + 5p + 4}$$

$$B(p) = 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} FTBO_{nc}(p) = \frac{10}{p^2 + 5p + 4} \\ FTBO_c(p) = \frac{10}{p(p^2 + 5p + 4)} \end{array} \right.$$

Correcteur intégral : exemple (2/3)

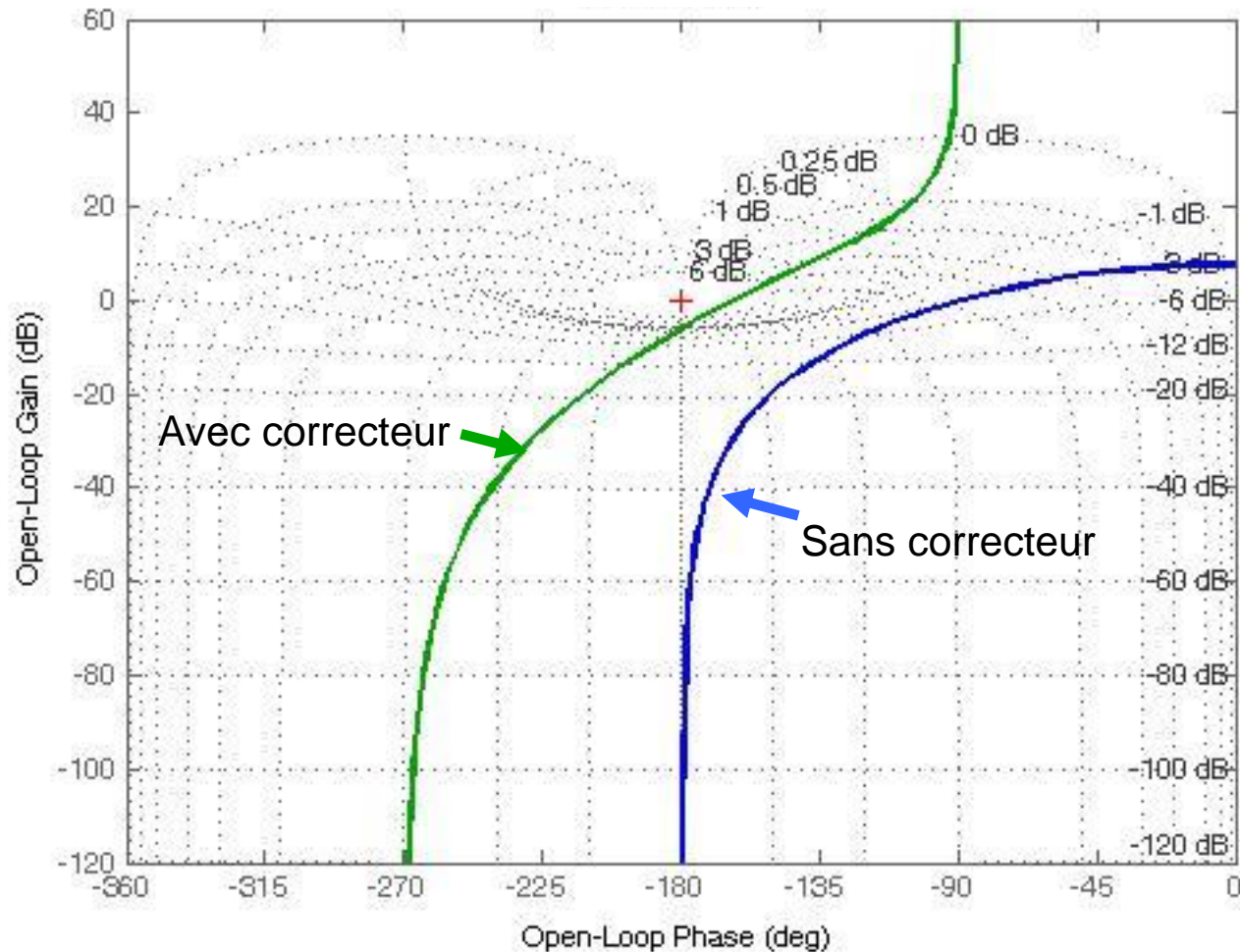
Diagrammes de Bode



- Augmentation du gain statique jusqu'à l'infini : système précis à 100% en BF
- Diminution de la marge de phase : système moins stable en BF
- Diminution de la pulsation du point de gain nul : système moins rapide en BF

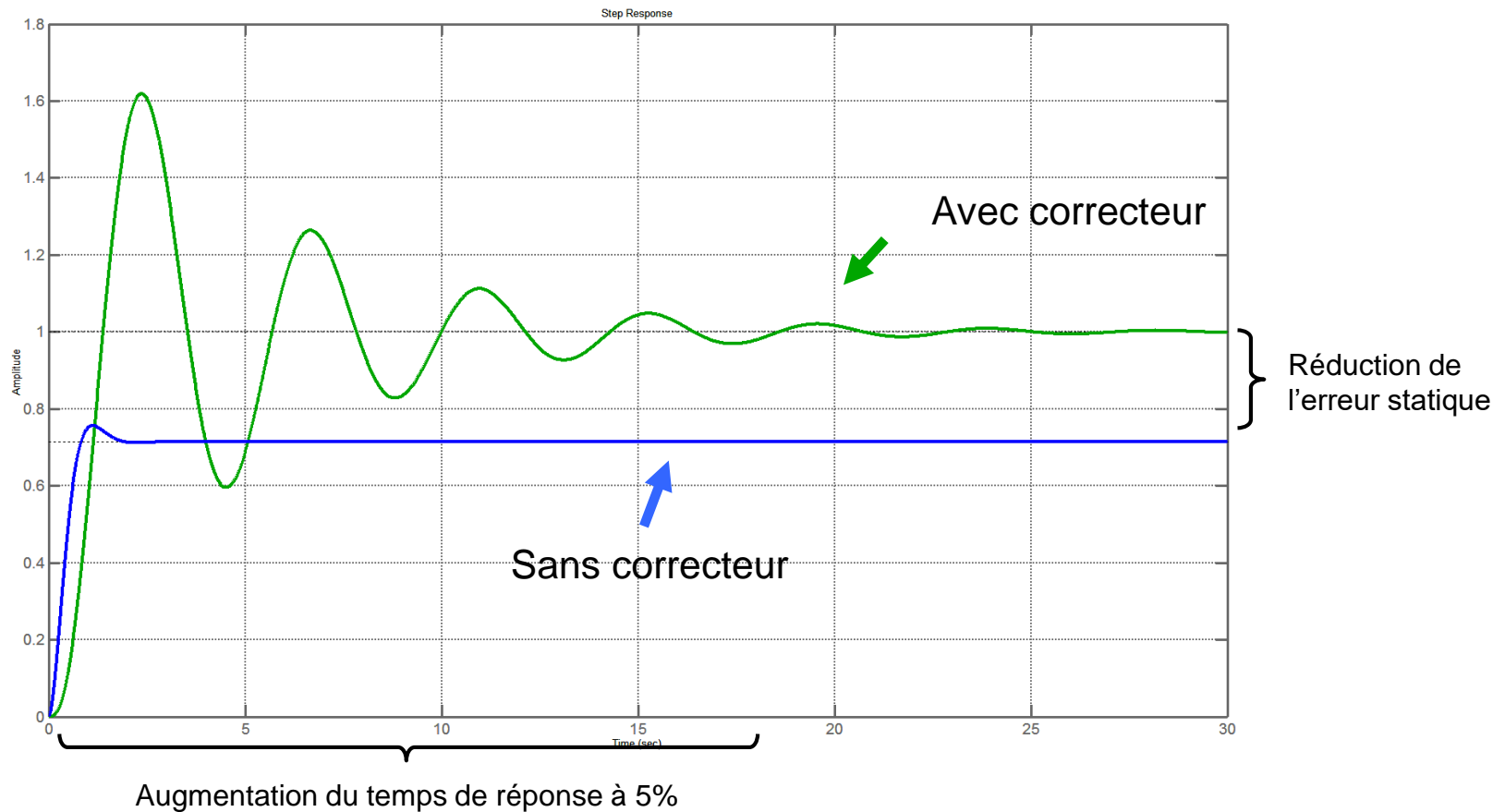
Correcteur intégral : exemple (2/3)

Diagramme de Nichols



Correcteur intégral : exemple (3/3)

Réponse indicielle du système en boucle fermée :



La précision est obtenue mais au détriment de la rapidité et de la stabilité

Correcteur à action dérivée (1/4)

$$C(p) = p$$

Le correcteur ajoute un zéro nul à la FTBO \rightarrow Intuitivement : action inverse de celle de l'intégrateur

En BO non corrigée :

$$G_{nc(dB)} = 20 \log |FTBO_{nc}(\omega)|$$

$$\varphi_{nc}(\omega) = \arg(FTBO_{nc}(\omega))$$

En BO corrigée :

$$G_c(dB) = G_{nc(dB)} + 20 \log |\omega|$$

$$\varphi_c(\omega) = \varphi_{nc}(\omega) + \frac{\pi}{2}$$

Correcteur à action dérivée (2/4)

Action sur le gain :

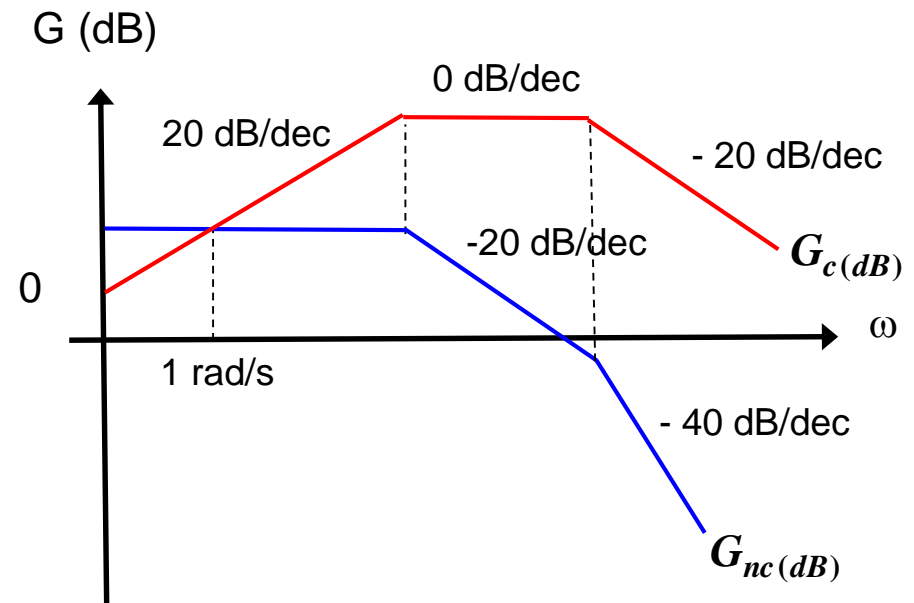
$$G_{nc}(dB) = 20 \log |FTBO_{nc}(\omega)|$$



$$G_c(dB) = G_{nc}(dB) + 20 \log |\omega|$$

On passe de la courbe de gain initiale $G_{nc}(dB)$ à la courbe corrigée en ajoutant à chaque segment l'équivalent d'un segment de pente 20 dB / dec.

Le gain statique est diminué, le système en BF corrigé sera donc moins précis



Correcteur à action dérivée (3/4)

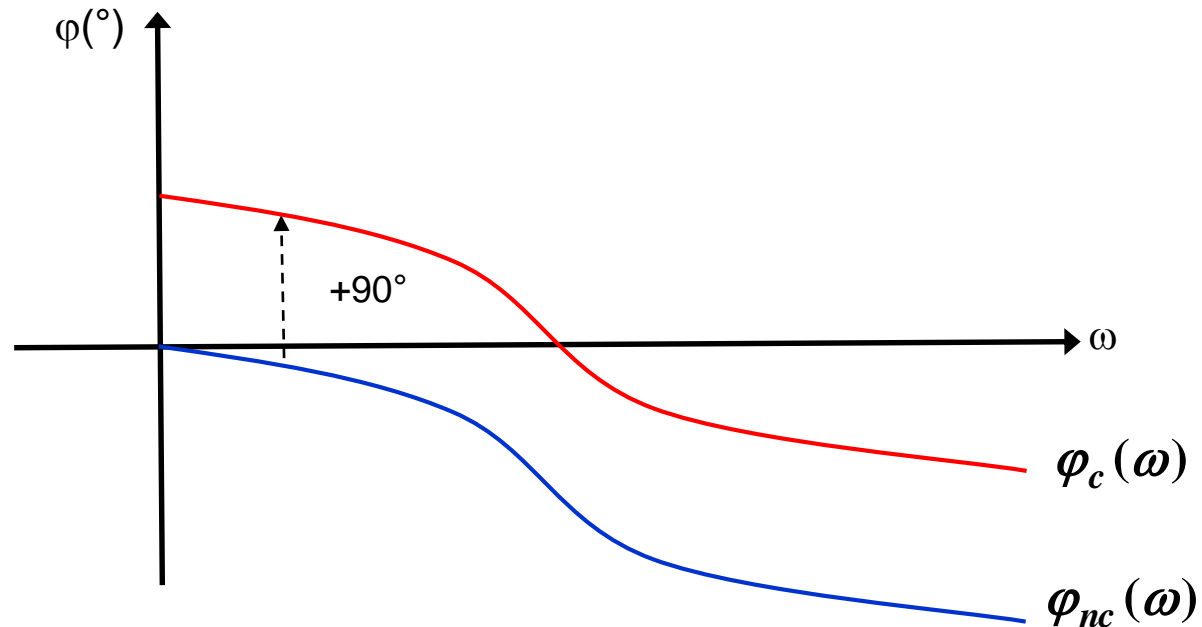
Action sur la phase :

$$\varphi_{nc}(\omega) = \arg(FTBO_{nc}(\omega))$$



$$\varphi_c(\omega) = \varphi_{nc}(\omega) + \frac{\pi}{2}$$

Le diagramme de phase est translaté de $\pi / 2$ vers le haut.



Correcteur à action dérivée (4/4)

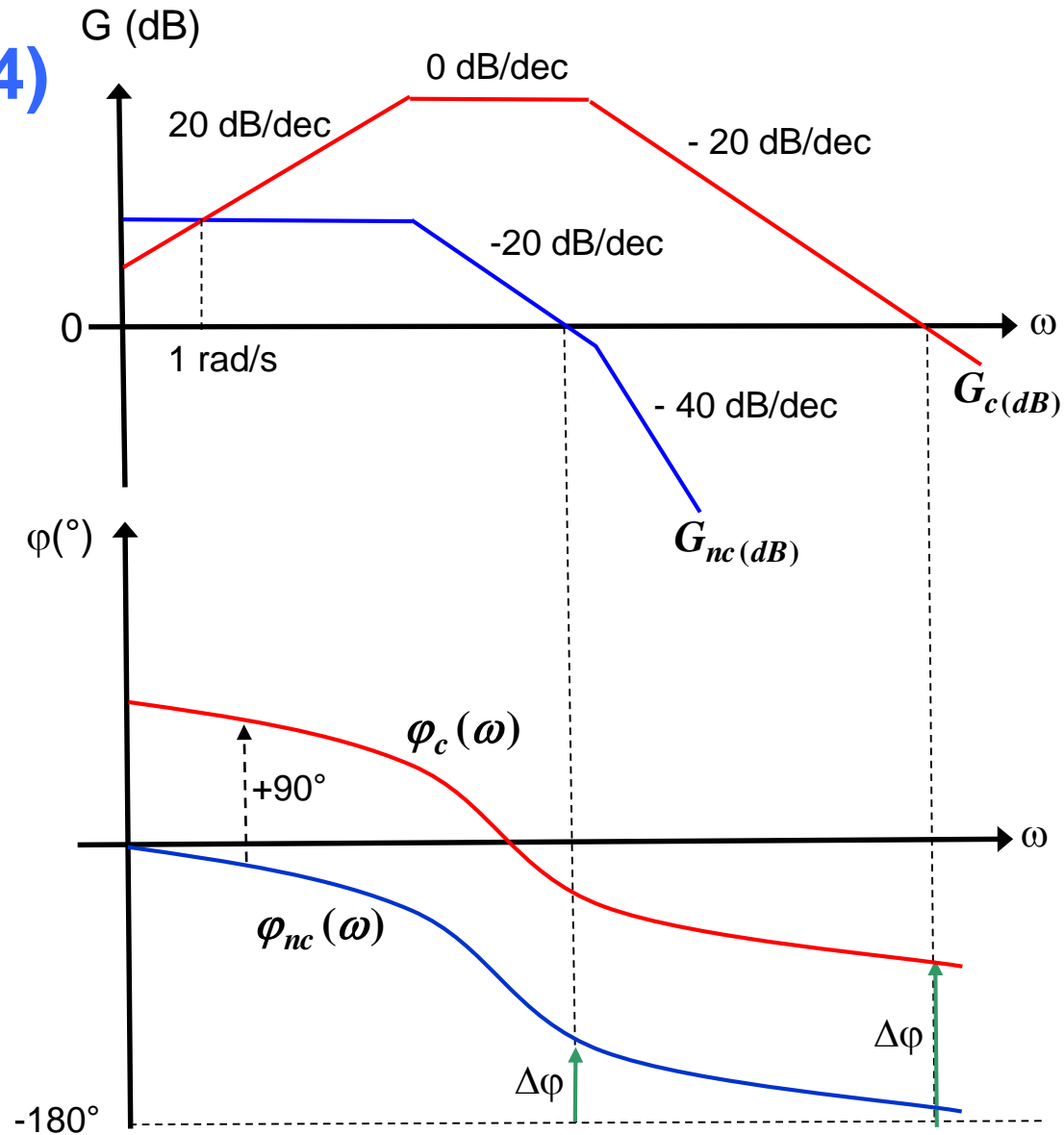
Augmentation de la pulsation du point de gain nul



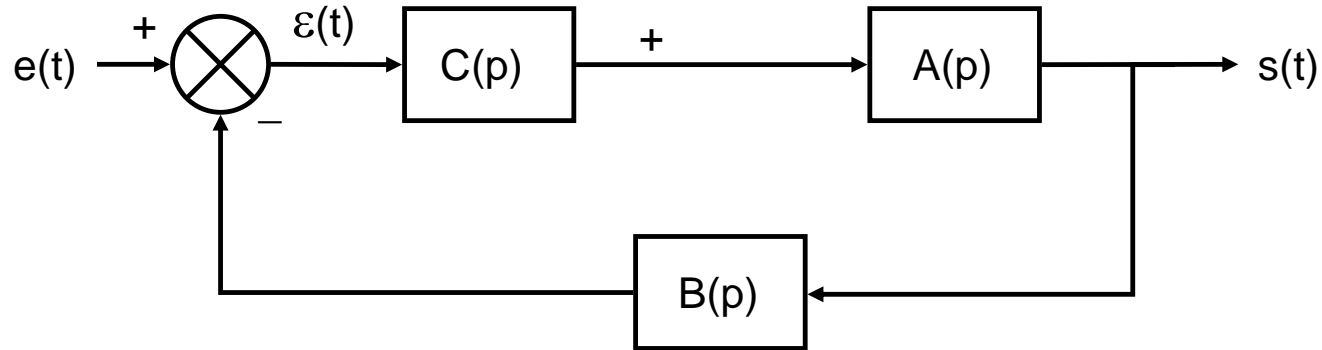
Diminution du temps de montée



Le dérivateur aura tendance à accélérer le système en BF



Correcteur à action dérivée : exemple (1/4)



$$C(p) = p$$

$$A(p) = \frac{100}{p^3 + 6p^2 + 9p + 4}$$

$$B(p) = 1$$

$$FTBO_{nc}(p) = \frac{100}{p^3 + 6p^2 + 9p + 4}$$

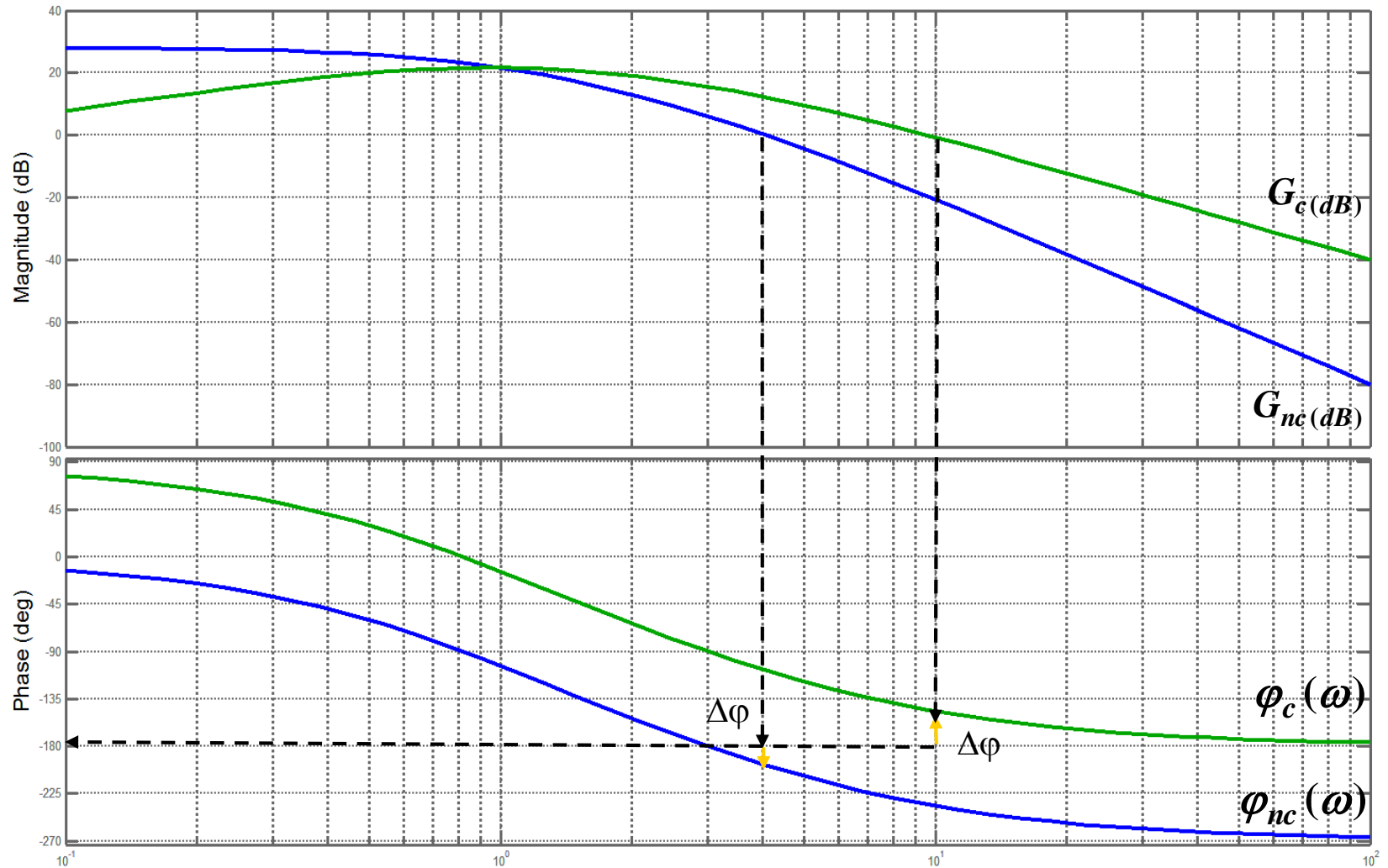
Pôles de $FTBF_{nc}$: $p_1 = -6,88$ et $p_{2,3} = 0,44 \pm i.3,86$

$$FTBO_c(p) = \frac{100p}{p^3 + 6p^2 + 9p + 4}$$

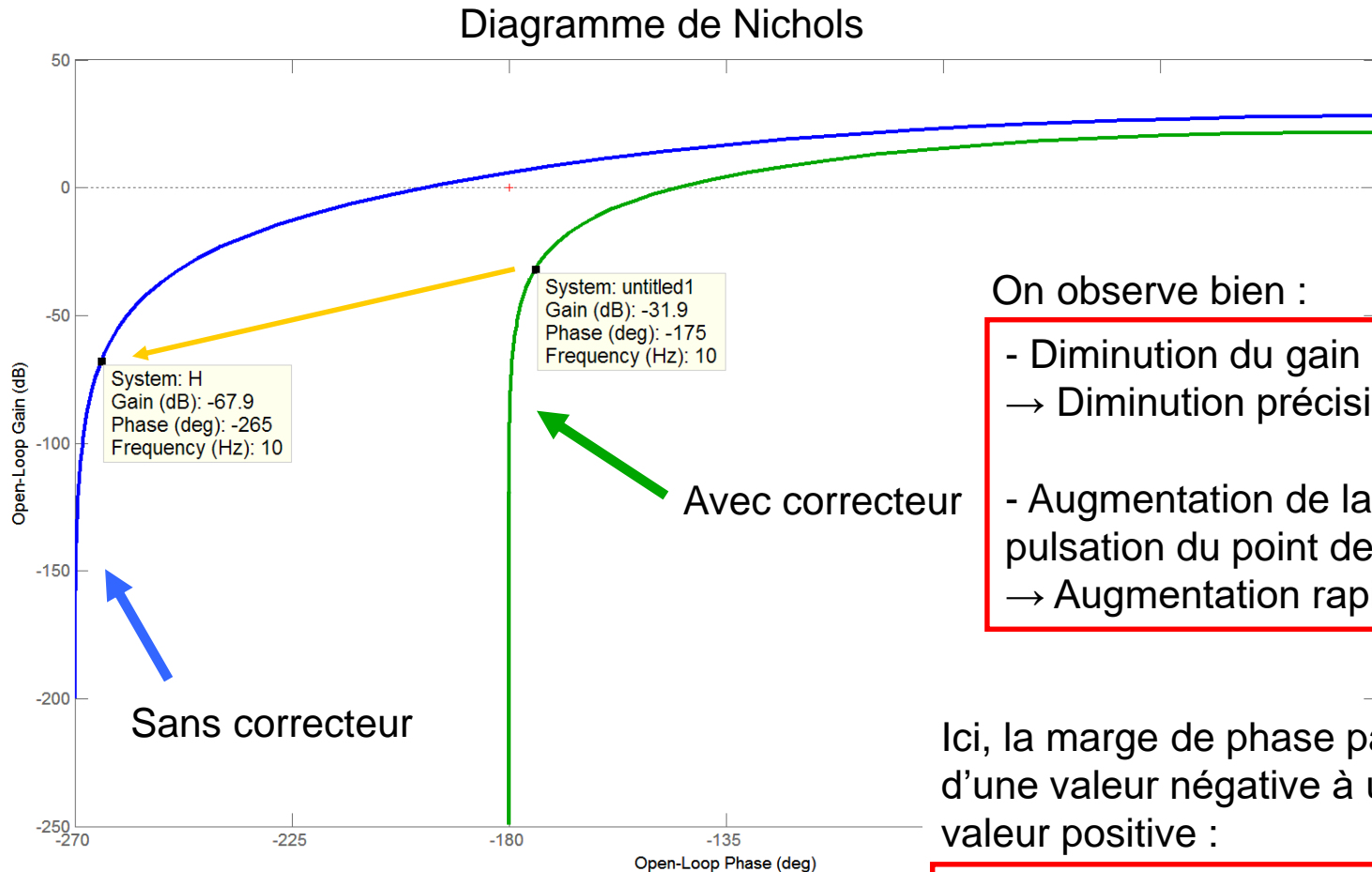
Pôles de $FTBF_c$: $p_1 = -1$ et $p_{2,3} = -2,50 \pm i.9,86$

Correcteur à action dérivée : exemple (2/4)

Diagrammes de Bode



Correcteur à action dérivée : exemple (3/4)



On observe bien :

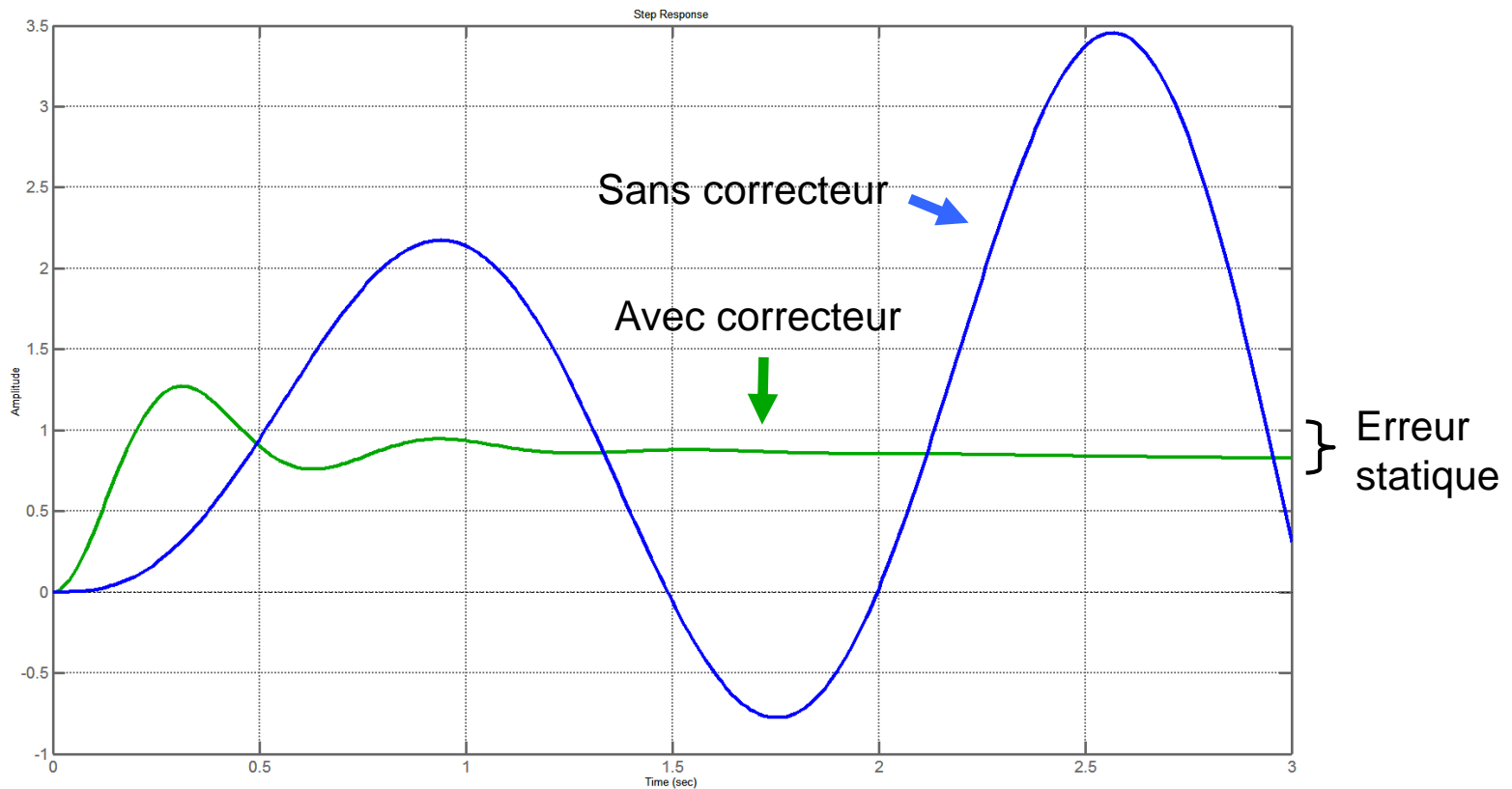
- Diminution du gain statique
→ Diminution précision
- Augmentation de la pulsation du point de gain nul
→ Augmentation rapidité

Ici, la marge de phase passe d'une valeur négative à une valeur positive :

le correcteur rend le système bouclé stable

Correcteur à action dérivée : exemple (4/4)

Réponse indicielle du système en boucle fermée :



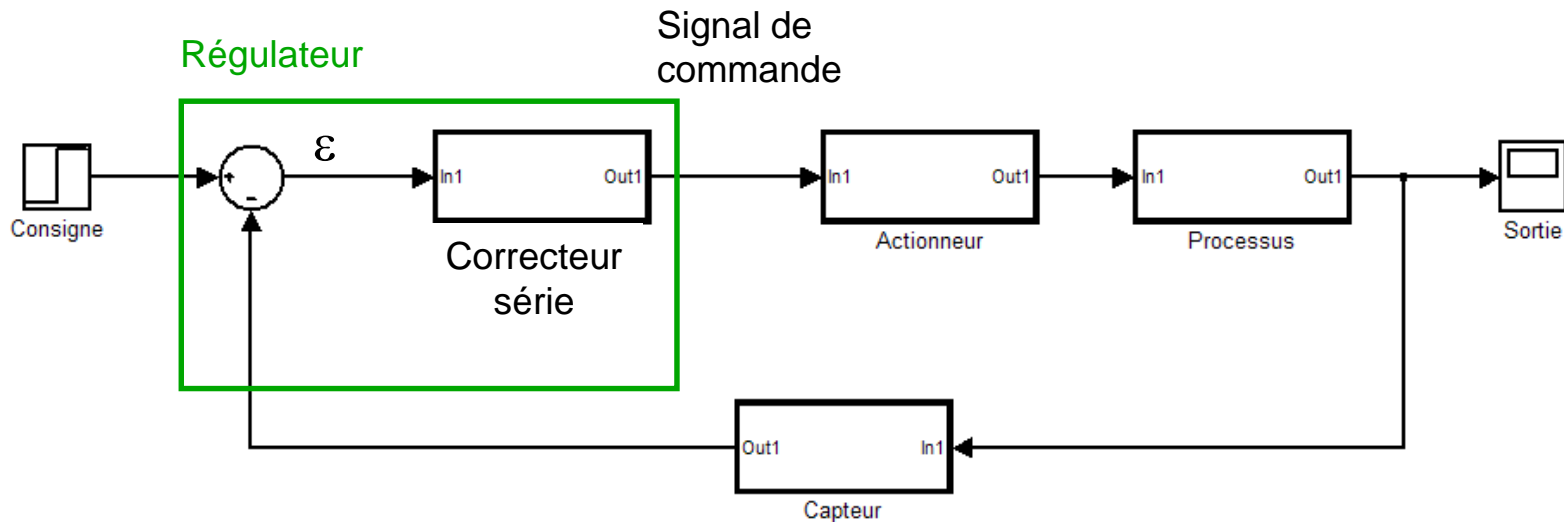
La stabilité est obtenue.

La rapidité est améliorée au détriment de la précision

Synthèse des effets des actions élémentaires

	Précision	Rapidité	Stabilité
Augmentation de P	Augmentation (100% si $P \rightarrow +\infty$)	Augmentation	Diminution, risque d'instabilité
Augmentation de I	Augmentation (jusqu'à 100%)	Diminution	Diminution, risque d'instabilité
Augmentation de D	Diminution	Augmentation	Dépend de l'ordre du système Augmentation si syst. d'ordre faible

Les correcteurs série à actions élémentaires



Un correcteur série est un correcteur placé en série avec le système à réguler ou à asservir. Il se situe en amont de l'actionneur, juste après le comparateur.

Parmi les principaux correcteurs série figurent les combinaisons de chacun des trois effets Proportionnel (P), Intégral (I) et Dérivé (D) vus précédemment : cela donne les correcteurs PD, PI et PID.

Il existe également les correcteurs à Avance de Phase (AP), Retard de Phase (RP) et Avance-Retard de Phase (ARP), dont les comportements sont similaires à ceux des correcteurs PD, PI et PID.

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (1/10)

Un correcteur proportionnel-intégral-dérivée s'obtient en combinant en parallèle les actions élémentaires proportionnelle, intégrale et dérivée :

$$C(p) = K_C \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right)$$

Le régulateur PID est aujourd'hui le type de régulateur le plus répandu dans le monde.

En pratique, le régulateur PID se présente sous la forme d'un boîtier électronique, se trouvant soit en salle de commande, soit directement sur le système à réguler. Cet appareil, enfichable dans un rack, est constitué de trois sous-ensembles réalisant chacun l'une des trois actions caractéristiques des régulateurs PID, ainsi que d'une station de contrôle qui permet d'assurer les fonctions suivantes :

- modification de la consigne,
- réglage des paramètres P, I, et D de la régulation,
- passage du mode automatique en mode manuel et inversement,

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (2/10)

En réduisant au même dénominateur la fonction de transfert du correcteur PID, il vient :

$$C(p) = K_c \frac{T_i T_d p^2 + T_i p + 1}{T_i p}$$

On peut réécrire cette fonction de transfert sous la forme suivante :

$$C(p) = K_c \frac{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}{T_i p}$$

Avec : $(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) = T_i T_d p^2 + T_i p + 1$

Discriminant de $T_i T_d p^2 + T_i p + 1$:

$$\Delta = T_i^2 - 4T_i T_d = T_i (T_i - 4T_d)$$

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow T_i \geq 4T_d$$

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (3/10)

Racines dans le cas où $\Delta \geq 0$:

$$p_1 = \frac{-T_i - \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d}$$

$$p_2 = \frac{-T_i + \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2T_i T_d}$$

Or : $p_1 = -\frac{1}{T_1} \Rightarrow T_1 = \frac{2T_i T_d}{T_i - \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}} \Rightarrow T_1 = \frac{2T_i T_d (T_i - \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d})}{T_i^2 - T_i^2 + 4T_i T_d}$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{T_i - \sqrt{T_i^2 - 4T_i T_d}}{2}$$

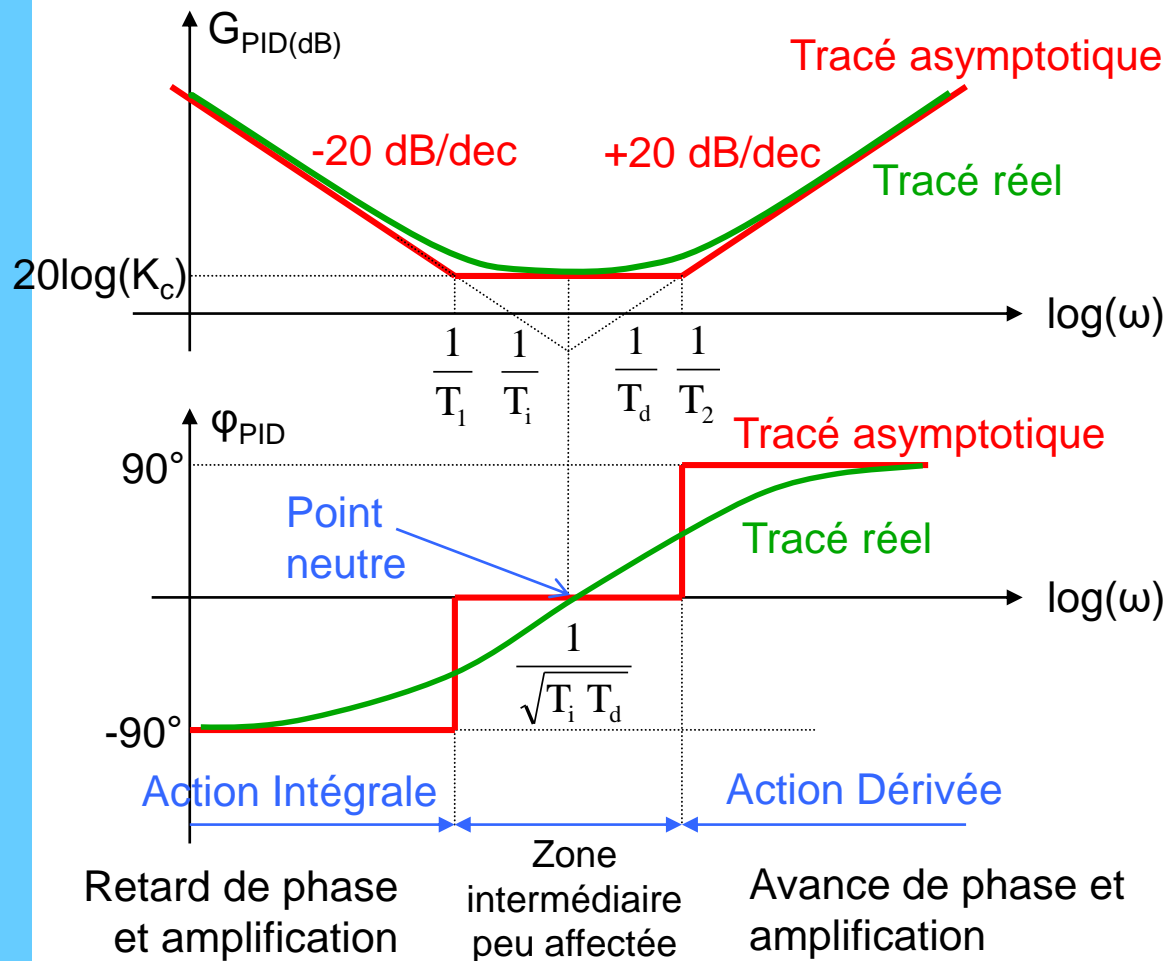
$$\Rightarrow T_1 = \frac{T_i}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right)$$

De même, on montre que : $T_2 = \frac{T_i}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{T_d}{T_i}} \right)$

Propriétés supplémentaires : $T_1 T_2 = T_i T_d$ et $T_1 + T_2 = T_i$

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (4/10)

Diagramme de Bode du correcteur PID :



En régime harmonique :

$$C(j\omega) = K_c \frac{T_i T_d (j\omega)^2 + T_i j\omega + 1}{T_i j\omega}$$

$$= K_c \frac{j T_i \omega + 1 - T_i T_d \omega^2}{j T_i \omega}$$

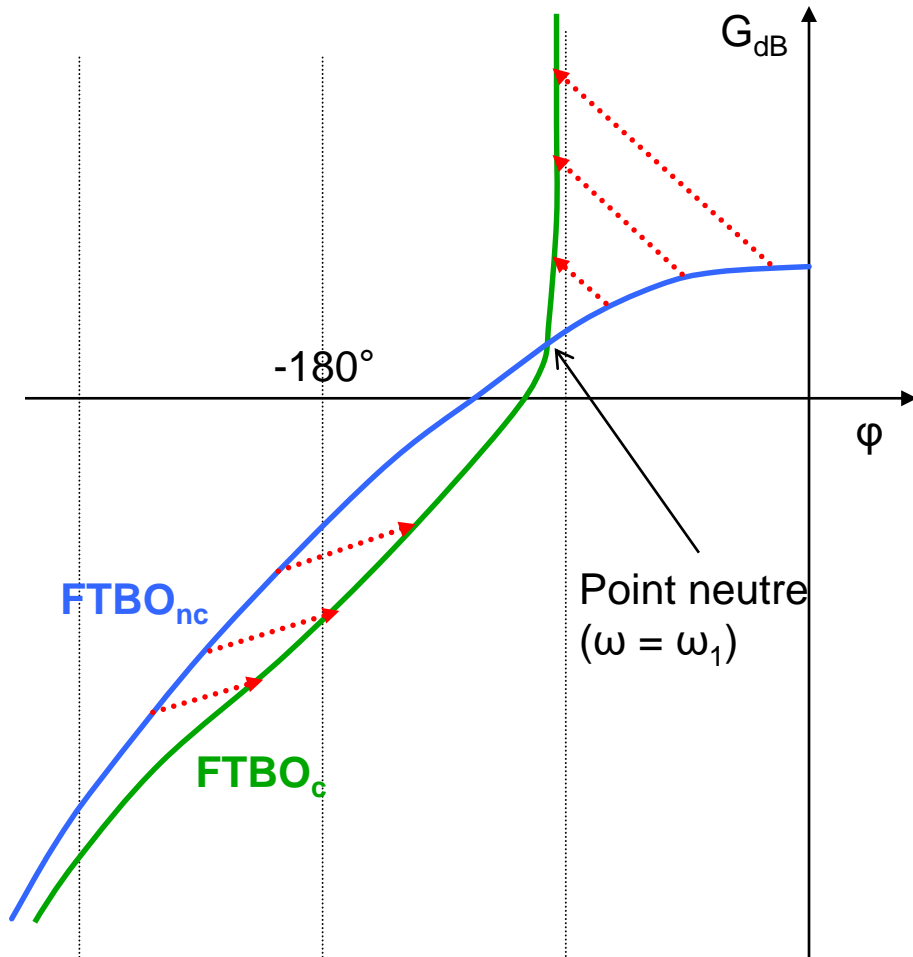
Si : $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_d T_i}}$ $C(j\omega) = K_c$

$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{T_d T_i}}$

est appelé point neutre

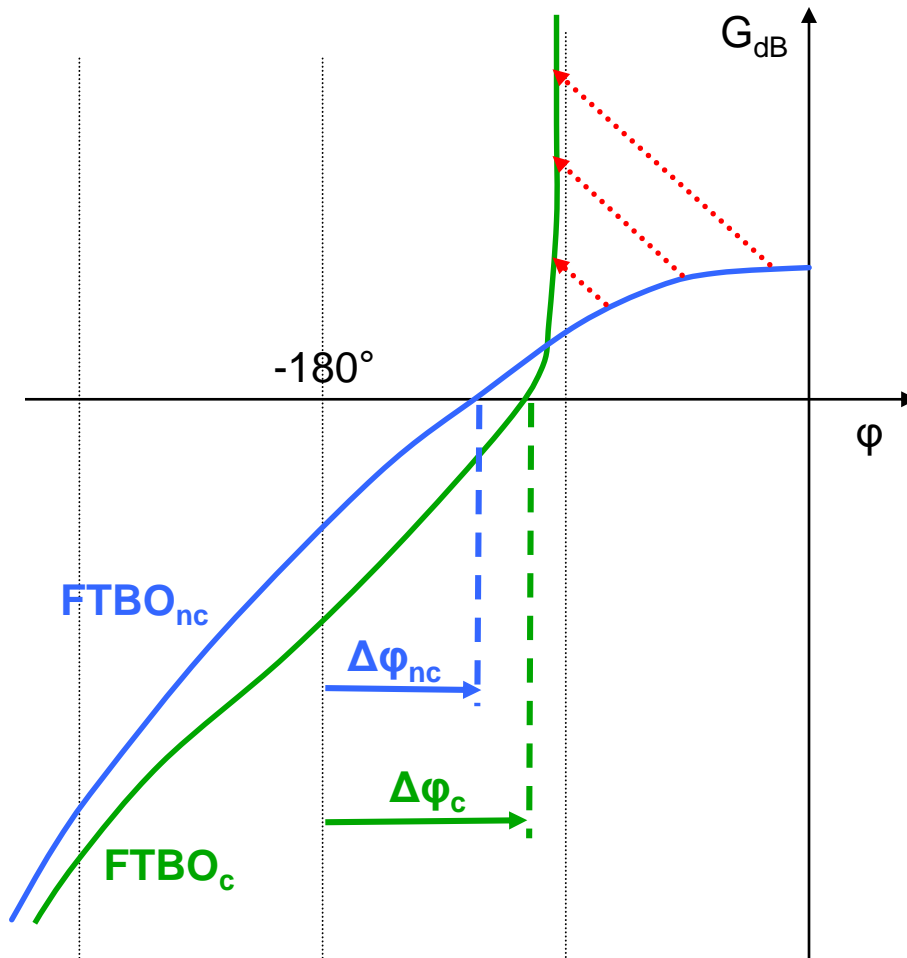
Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (5/10)

Effet du correcteur PID sur le diagramme de Nichols dans le cas où $K_c = 1$:



Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (6/10)

Effet du correcteur PID sur le diagramme de Nichols dans le cas où $K_c = 1$:



Augmentation du gain statique en BO (vers $+\infty$)



Augmentation de la précision en BF (100%)

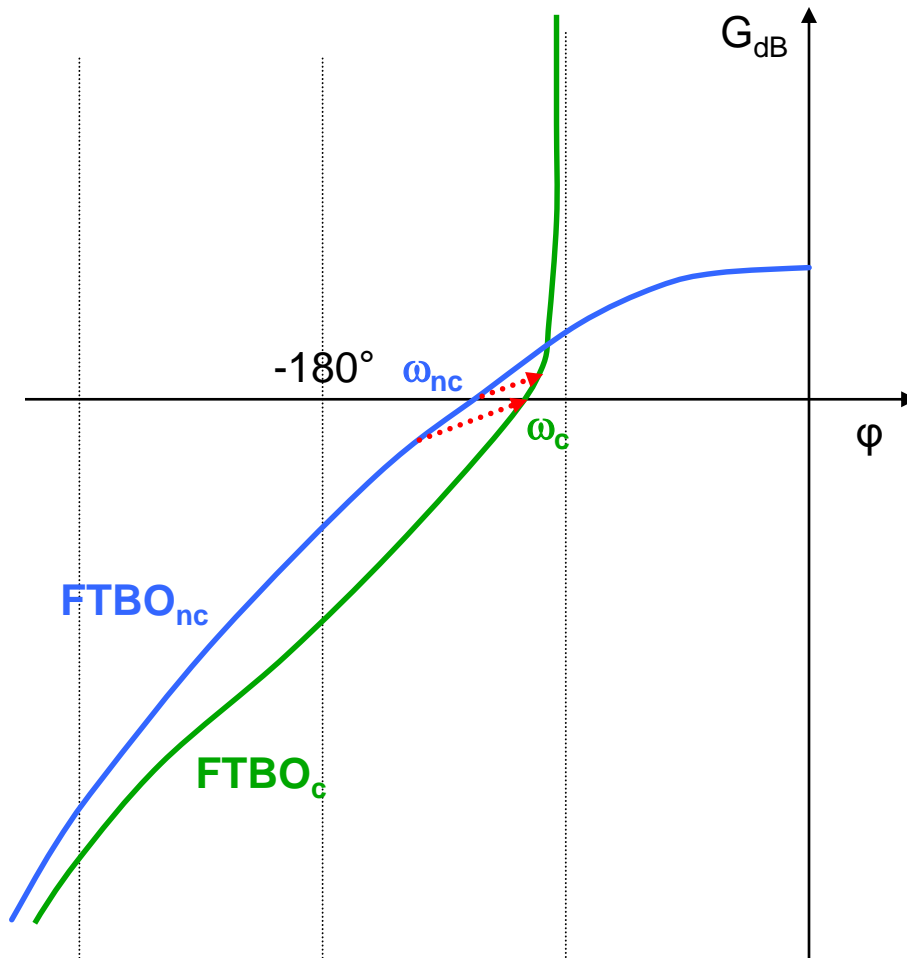
Augmentation de la marge de phase en BO



Augmentation de la stabilité en BF

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (7/10)

Effet du correcteur PID sur le diagramme de Nichols dans le cas où $K_c = 1$:



Augmentation de la pulsation ω_c du point de gain nul



Augmentation de la rapidité en BF

En résumé, un correcteur PID permet d'augmenter la précision, la rapidité et la stabilité.

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (8/10)

La fonction de transfert du PID « idéal » est :

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) = K_c \frac{T_i T_d p^2 + T_i p + 1}{T_i p}$$

Cette fonction de transfert n'est pas réalisable en pratique car impropre. Pour palier ce problème, il est nécessaire d'utiliser une dérivée filtrée :

$$T_d p \rightarrow \frac{T_d p}{1 + \tau p}$$

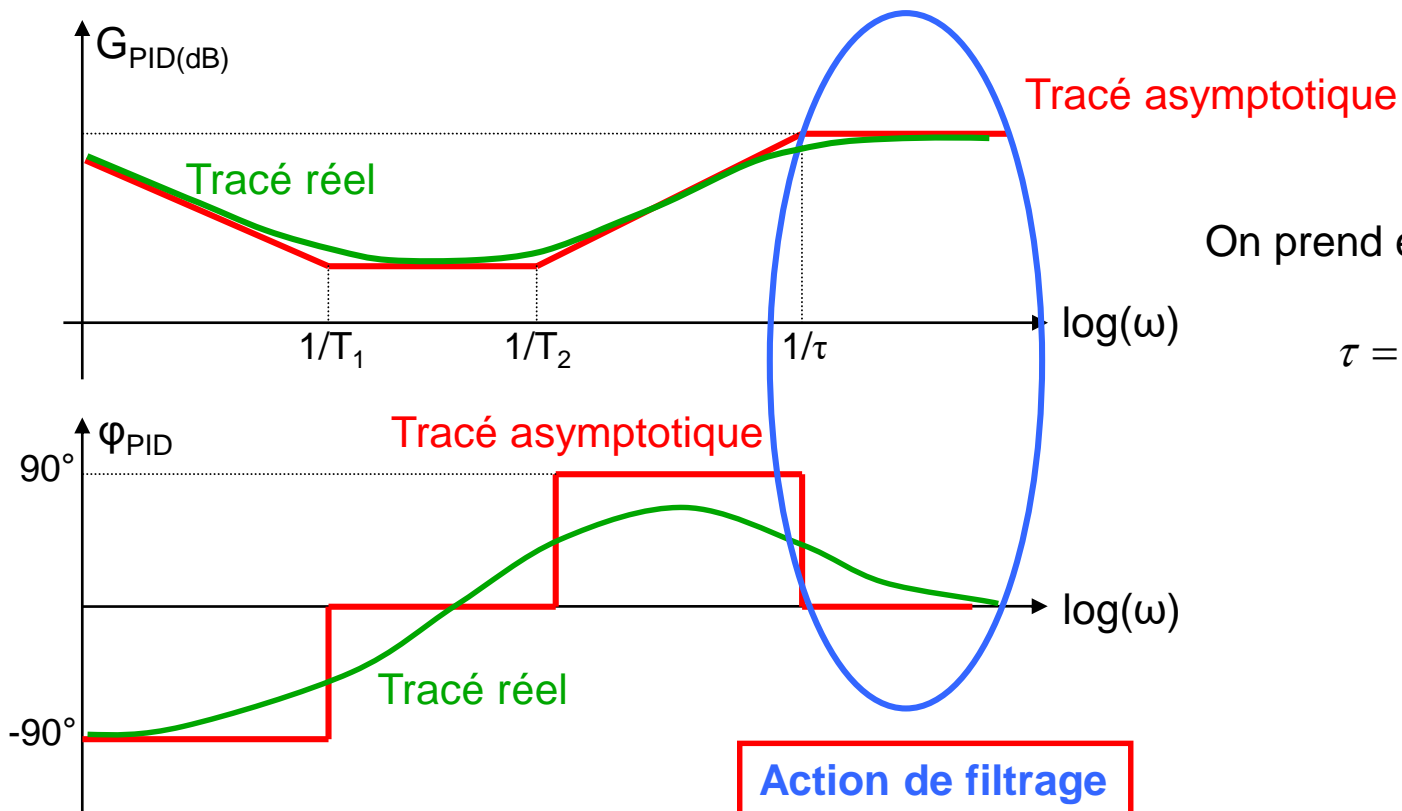
La fonction de transfert du PID filtré est donc :

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right) = K_c \frac{T_i (T_d + \tau) p^2 + (T_i + \tau) p + 1}{T_i \tau p^2 + T_i p}$$

ce qui est bien une fonction de transfert propre.

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (9/10)

Diagramme de Bode du correcteur PID (filtré) :

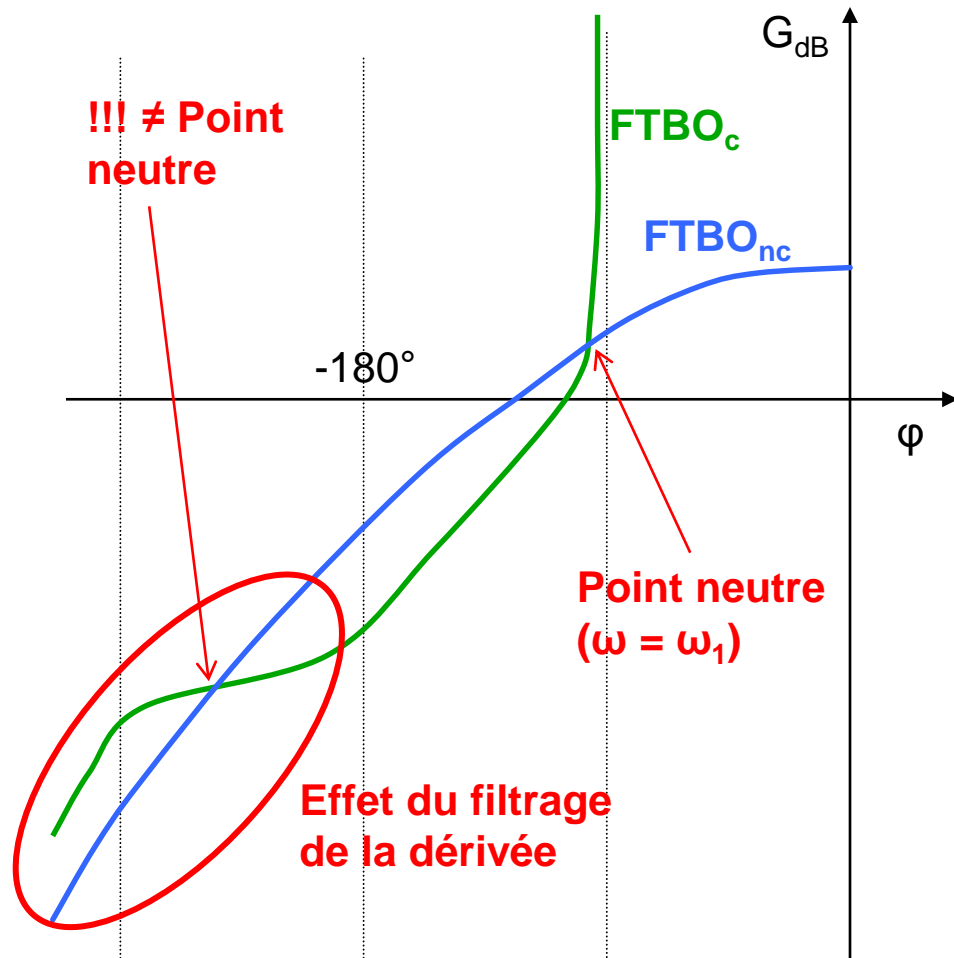


On prend en général :

$$\tau = \frac{T_d}{10}$$

Correcteur proportionnel-intégral-dérivée (10/10)

Diagramme de Nichols du PID filtré dans le cas où $K_c = 1$:



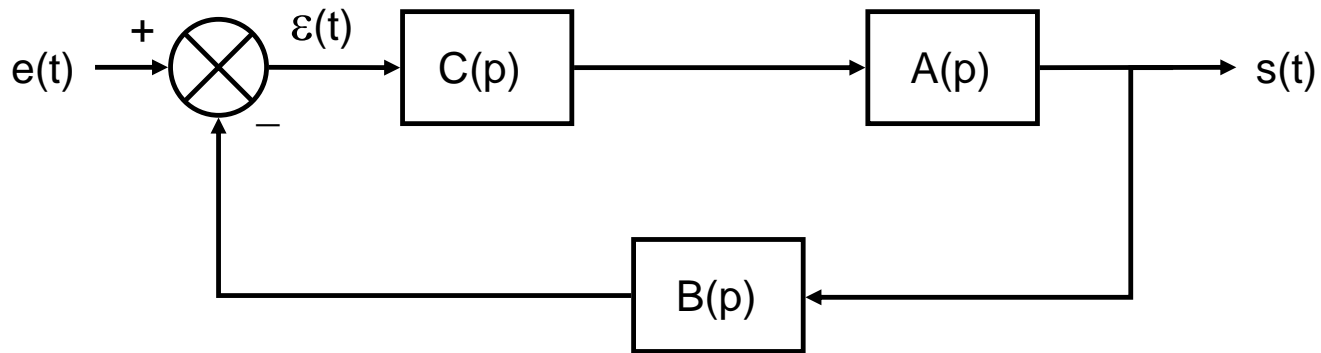
L'action de filtrage du PID n'a pas d'effet sur :

- la marge de phase
- la pulsation du point de gain nul
- le gain à basse fréquence



L'action de filtrage du PID n'affecte pas les performances en précision, rapidité et stabilité.

Correcteur PID – Exemple (1/5)



$$A(p) = \frac{5}{p^2 + 0.4p + 1}$$

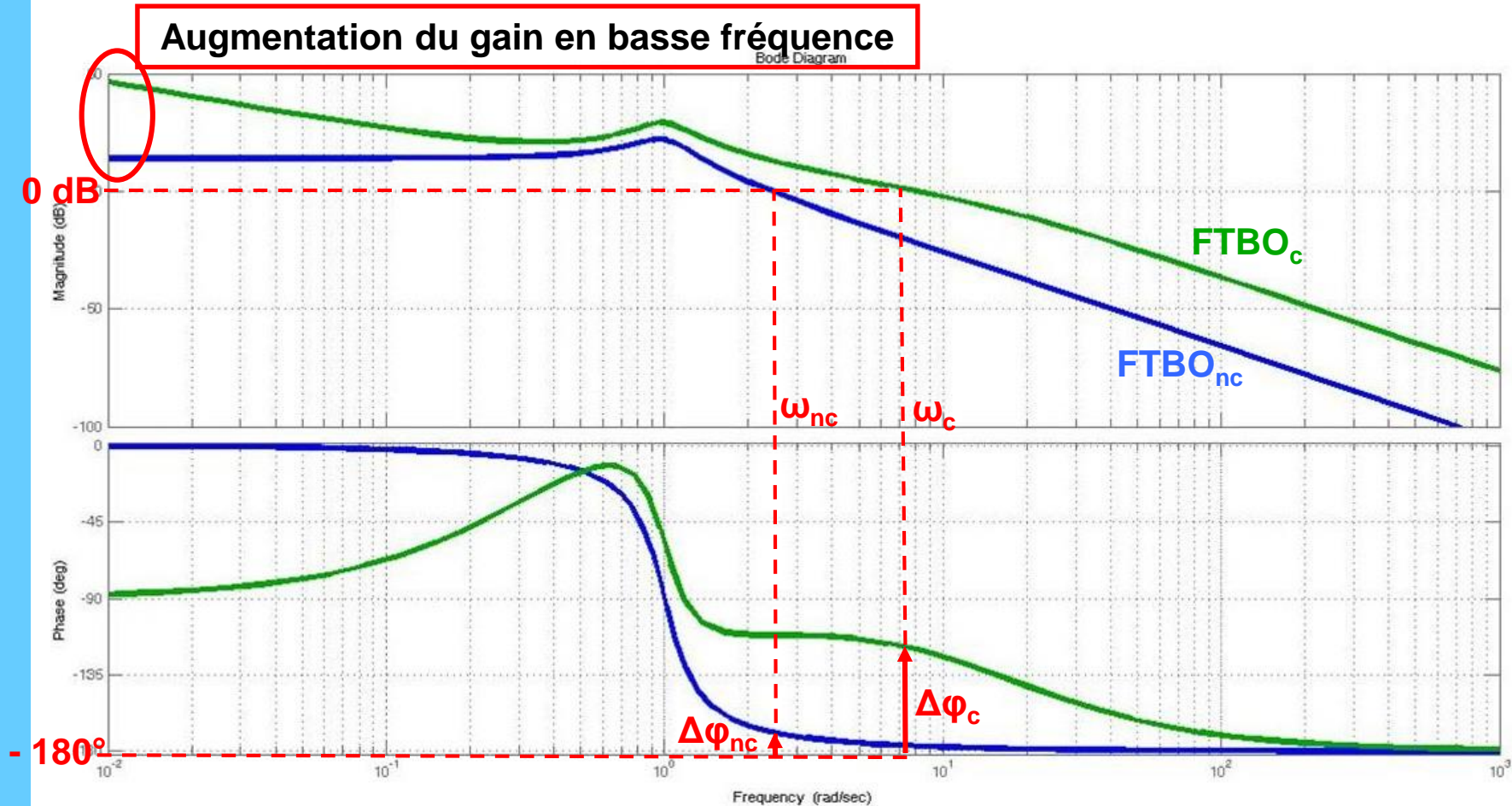
$$B(p) = 1$$

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + \tau p} \right)$$

$$\begin{aligned} K &= 1.85 & T_d &= 0.88 \text{ s} \\ T_i &= 4.45 \text{ s} & \tau &= 0.06 \text{ s} \end{aligned}$$

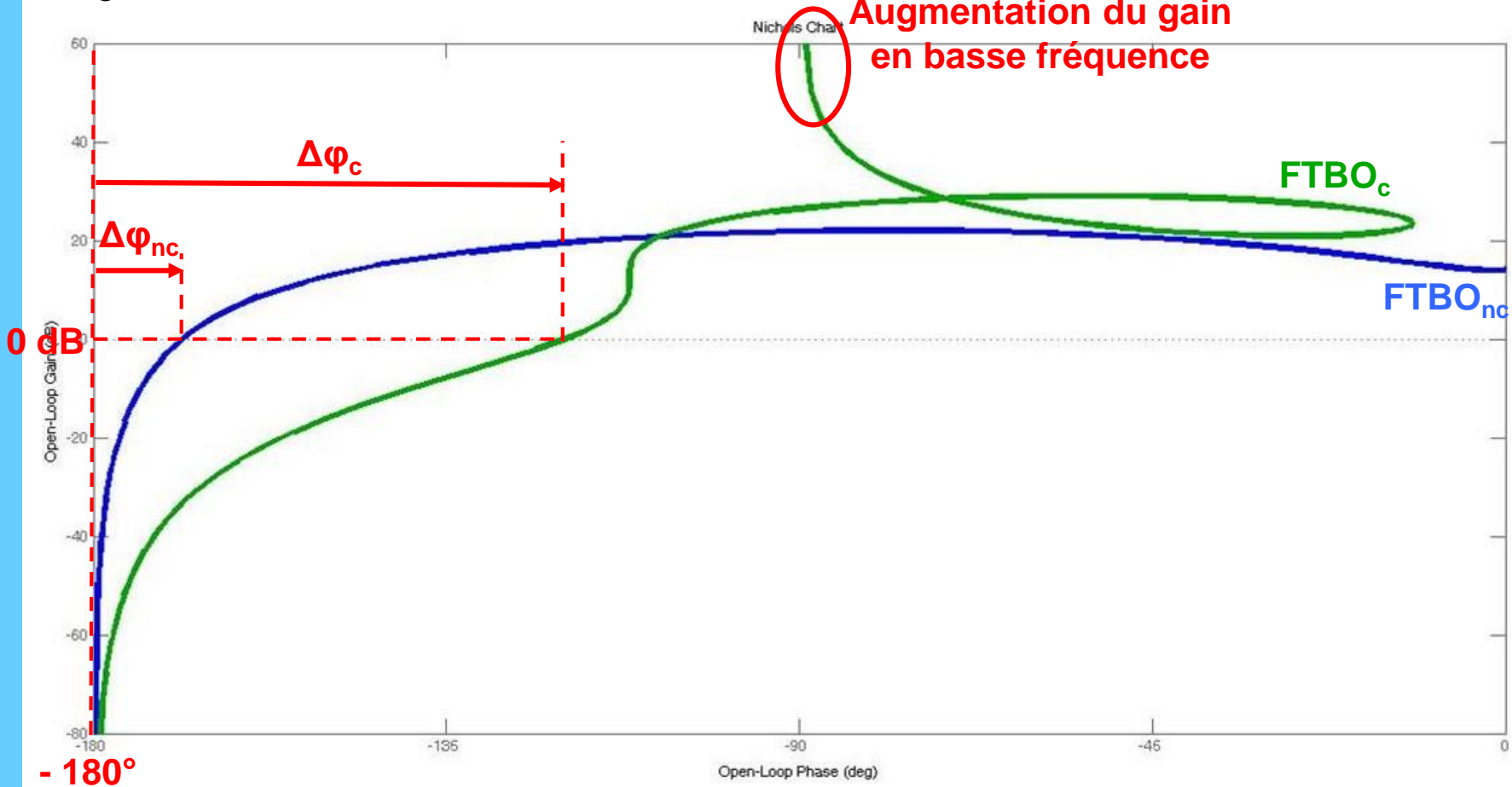
Correcteur PID – Exemple (2/5)

Diagrammes de Bode en boucle ouverte :



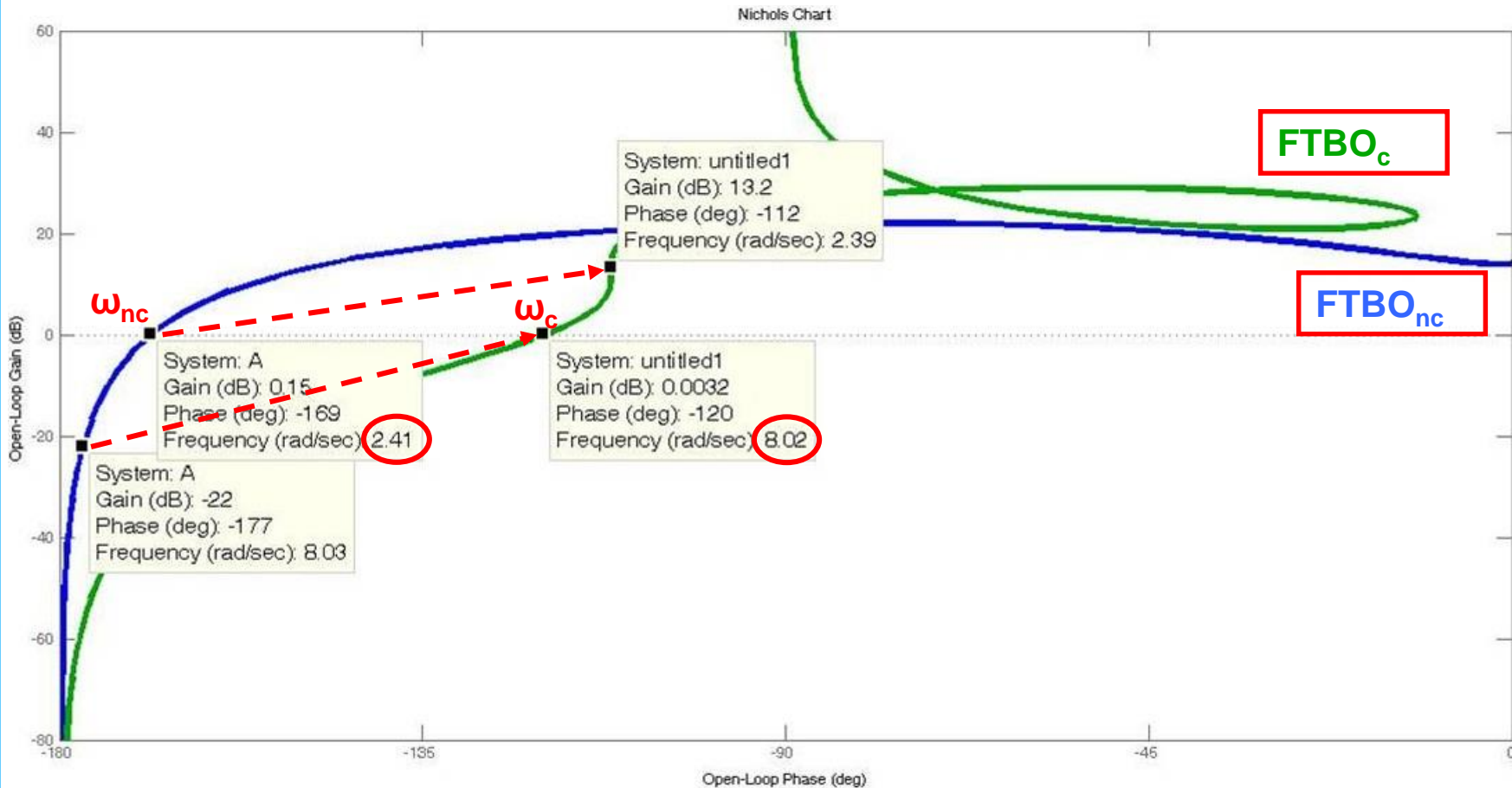
Correcteur PID – Exemple (3/5)

Diagramme de Nichols en boucle ouverte :



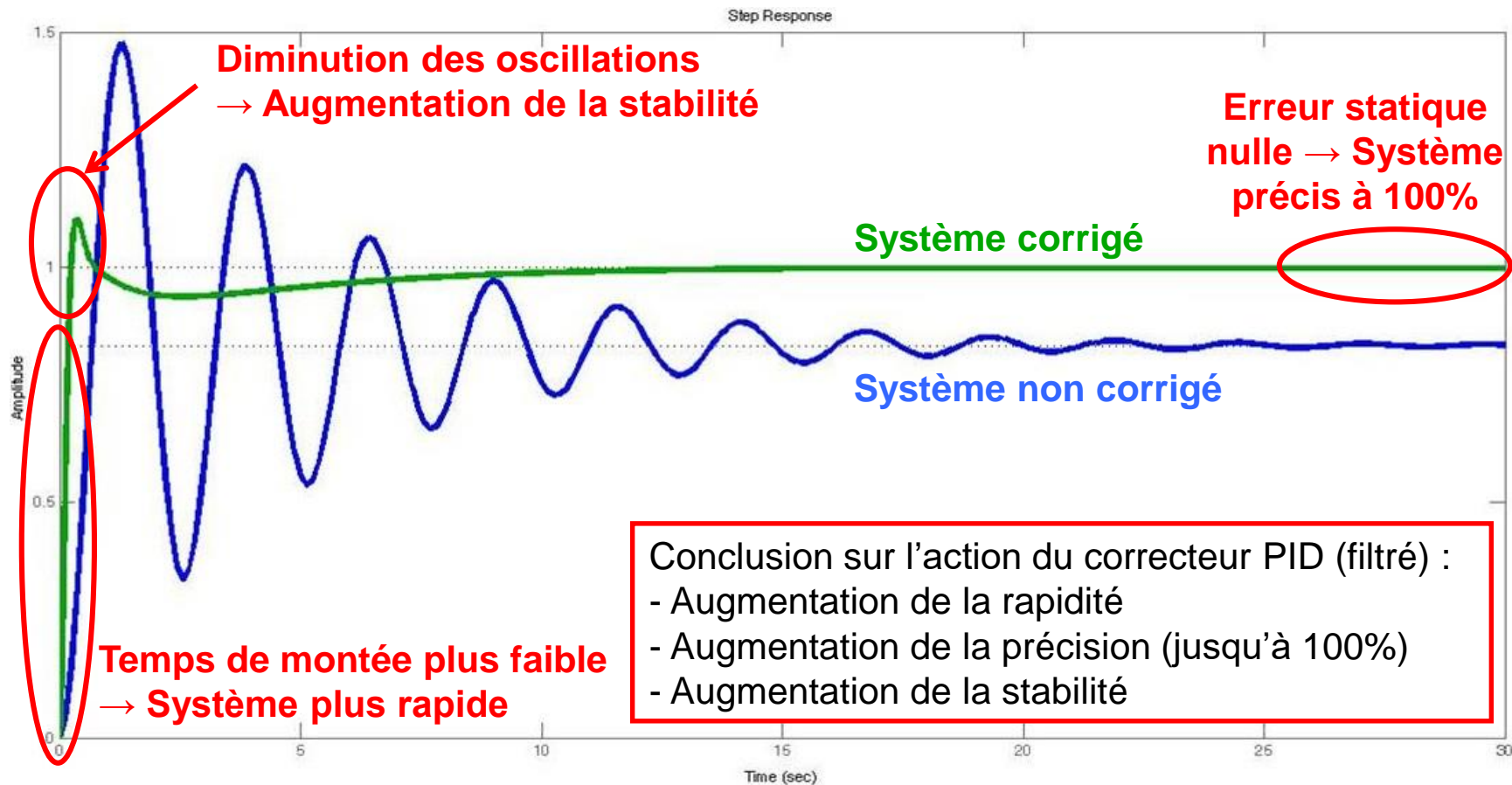
Correcteur PID – Exemple (4/5)

Diagramme de Nichols en boucle ouverte :



Correcteur PID – Exemple (5/5)

Réponse indicielle en boucle fermée :



Correcteur PID – Méthodes de réglage

Standard PID tuning methods :

- Naslin Tuning Method
- Ziegler –Nichols Method
- Optimum Magnitude Method
- Standard Polynomial Methods
- Cohen -Coon Method
- Chien, Hrones and Reswick Tuning Method
- Minimum Error Integral Methods (IAE,ISE, ISTE,ITAE, MSE)
- Gain-phase Margin Methods
- Pole Placement Methods
- Tyreus-Luyben Method
- Autotune Methods

Advanced PID tuning methods :

- Fertyk Tuning Method
- Ciancone Tuning Method
- Direct Synthesis Method
- IMC Tuning Methods
- Skogestad - IMC Tuning Methods
- Viteckova -IMC Tuning Methods
- Gain Scheduling Methods
- Robust PID Tuning Methods
- Fuzzy gain Scheduling Methods
- Supervisory fuzzy – PID Methods
- Neural PID Tuning Methods
- Adaptive fuzzy - Neural PID Methods
- Lambda Tuning Method

Source : « From PID to MPC : Control Engineering Methods Development and Applications », Štefan Kozák, Int. Conf. on Cybernetics & Informatics, Levoca, Slovakia, February 2016.

En TD et TP :

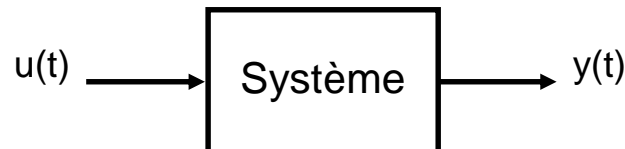
- Méthode de Pierre Naslin (1920-2009)
- Méthode polynomiale
- Méthodes de John G. Ziegler (1909-1997) & Nathaniel Black Nichols (1914-1997)

Réglage de PID : Méthode de Ziegler-Nichols en BO (1/2)

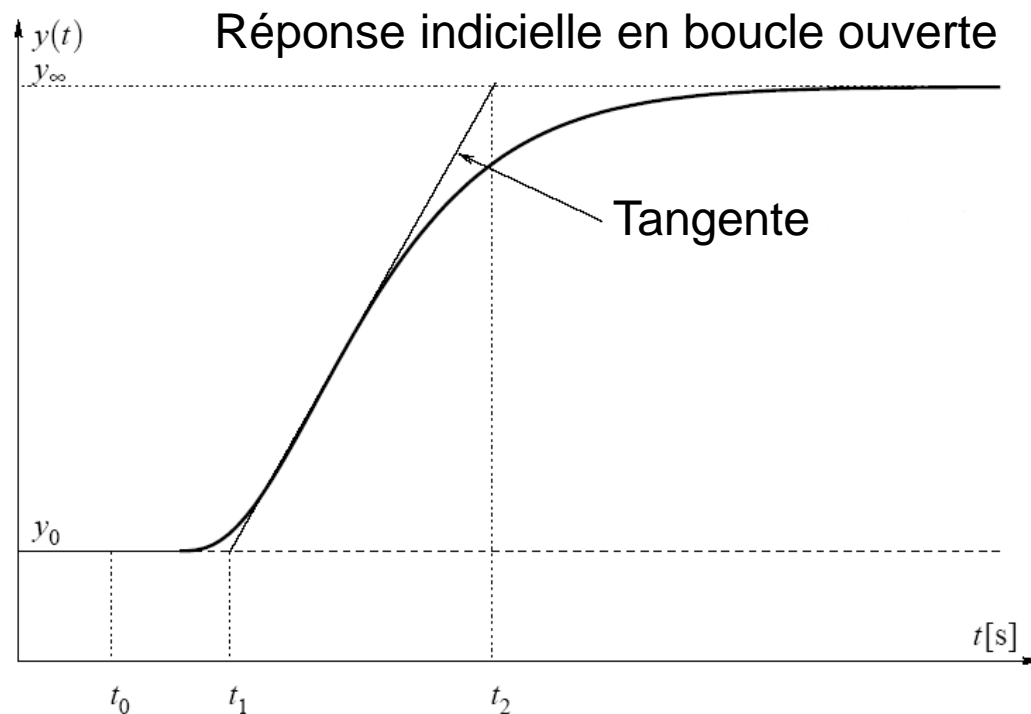
Méthode expérimentale de réglage en boucle ouverte (1942)

Marche à suivre :

- 1 – Placer le procédé en boucle ouverte à un point de fonctionnement stabilisé défini par $y(t) = y_0$ pour $u(t) = u_0$
- 2 – A l'instant initial t_0 , appliquer un échelon en entrée en passant de u_0 à u_∞ (le saut doit être entre 10 et 20 % de la valeur nominale).
- 3 – Enregistrer la réponse du système et tracer la tangente de la courbe au point d'inflexion



Réglage de PID : Méthode de Ziegler-Nichols en BO (2/2)



$$\left\{ \begin{array}{l} k_0 = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0}, \\ \tau_0 = t_1 - t_0, \\ \gamma_0 = t_2 - t_1. \end{array} \right.$$

	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{\gamma_0}{K_0 \tau_0}$		
PI	$\frac{0,9\gamma_0}{K_0 \tau_0}$	$3\tau_0$	
PID	$\frac{1,2\gamma_0}{K_0 \tau_0}$	$2\tau_0$	$0,5\tau_0$

Réglage de PID : Méthode de Ziegler-Nichols en BF (1/3)

Intérêts de la méthode :

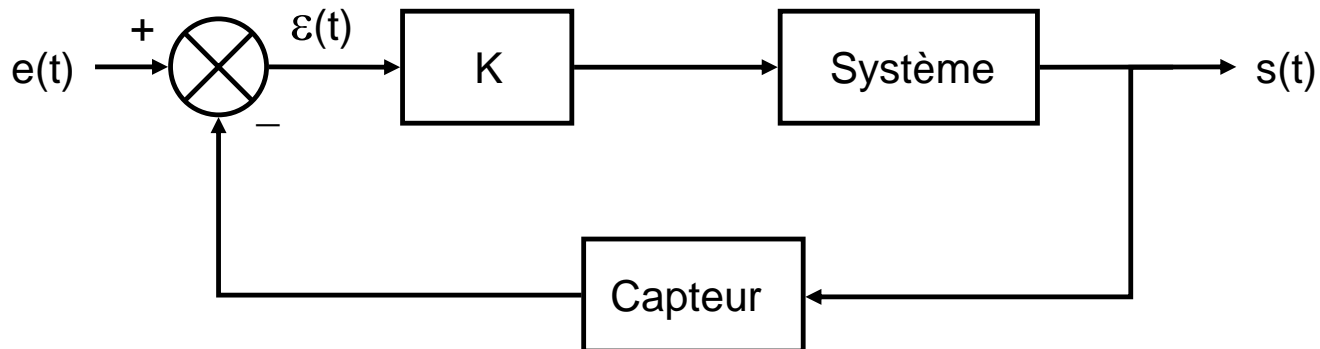
- Utilisable "sur site"
- Le second dépassement est quatre fois inférieur au premier dans le cas d'une réponse indicielle.

La méthode de Ziegler-Nichols fonctionne aussi bien avec les systèmes stables qu'avec les systèmes instables

Réglage de PID : Méthode de Ziegler-Nichols en BF (2/3)

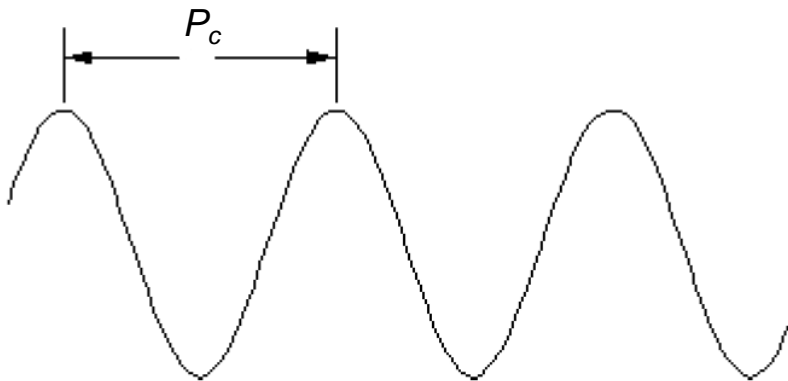
Marche à suivre :

- 1 - Annuler les actions intégrale ($T_i = \infty$) et dérivée ($T_d = 0$) du régulateur placé dans la boucle fermée. Ce dernier ne comporte donc plus que le gain "K" (action proportionnelle).
- 2 – Régler la consigne à une valeur constante (ex : zéro).



Réglage de PID : Méthode de Ziegler-Nichols en BF (3/3)

- 3 - Faire varier le gain K jusqu'à l'apparition de l'oscillation critique (une faible variation de K_c , dans un sens ou dans l'autre menant le système soit à une divergence, soit à la stabilité).
- 4 - Relever la période P_c de l'oscillation, ainsi que la valeur limite du gain (notée K_c).



	K	T_i	T_d
P	$0,50K_c$		
PI	$0,45K_c$	$\frac{P_c}{1,2}$	
PID	$0,60K_c$	$\frac{P_c}{2}$	$\frac{P_c}{8}$

Correcteur à avance de phase (1/7)

Objectif : apporter de la phase pour augmenter la marge de phase de la FTBO et par conséquent la stabilité de la FTBF

Fonction de transfert d'un correcteur à avance de phase :

$$C(p) = K_c \frac{1 + a \tau p}{1 + \tau p} \quad \text{avec } a > 1, \tau > 0$$

Expressions du gain $G_{AP(dB)}$ et de la phase φ_{AP} du correcteur A.P. $C(p)$:

$$G_{AP(dB)}(\omega) = 20 \log |C(j\omega)| = 20 \log(K_c) + 10 \log(1 + a^2 \tau^2 \omega^2) - 10 \log(1 + \tau^2 \omega^2)$$

$$\varphi_{AP}(\omega) = \arg(C(j\omega)) = \arctg(a \tau \omega) - \arctg(\tau \omega)$$

Correcteur à avance de phase (2/7)

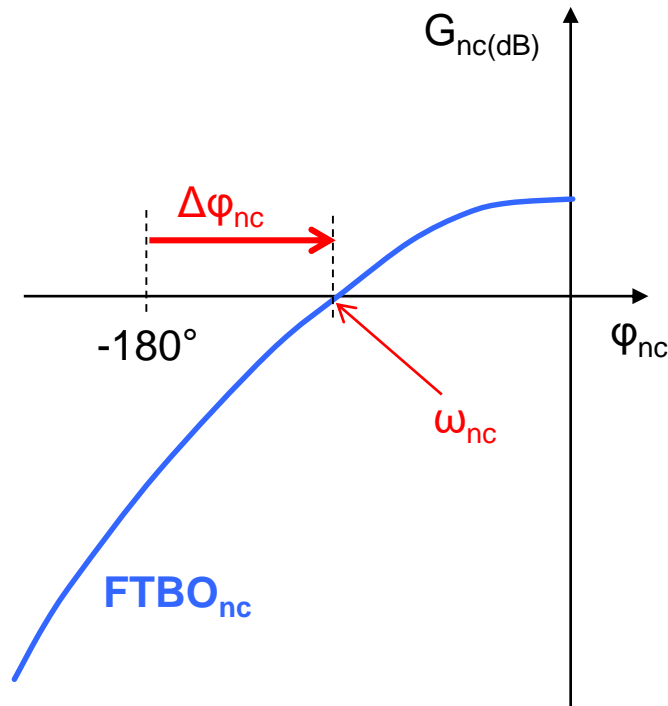
Selon le cahier des charges :

- Spécifications sur la stabilité (marge de phase)
- Spécifications éventuelles sur la précision et la rapidité

=> Méthode de réglage à adapter selon le cahier des charges !

Correcteur à avance de phase (3/7)

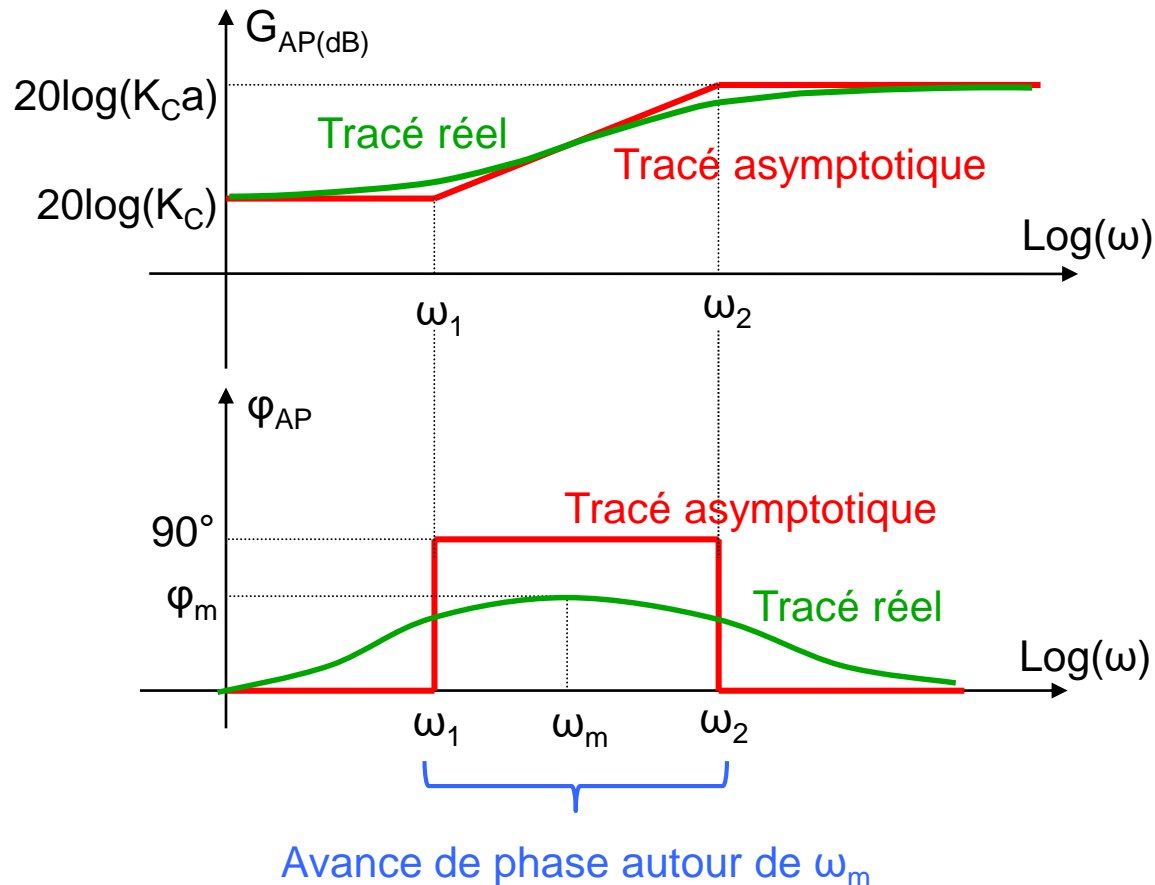
Grandes lignes pour le réglage d'un correcteur à avance de phase :



- 1) On dispose de la marge de phase $\Delta\varphi_{nc}$ de la $FTBO_{nc}$ et la pulsation ω_{nc} associée.
- 2) On dispose a minima de spécifications sur la marge de phase $\Delta\varphi_c$ **minimale** souhaitée pour la $FTBO_c$
- 3) A partir de $\Delta\varphi_c$, on calcule l'avance de phase que doit apporter le correcteur
- 4) On règle les paramètres du correcteur selon les spécifications précisées dans le cahier des charges

Correcteur à avance de phase (4/7)

Caractéristiques du correcteur :



Pulsations de cassure
($\omega_1 < \omega_2$) :

$$\omega_1 = \frac{1}{a \tau} \quad \omega_2 = \frac{1}{\tau}$$

Après démonstration,
on trouve :

$$\omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{a}}$$

$$\sin(\varphi_m) = \frac{a - 1}{a + 1}$$

Correcteur à avance de phase (5/7)

Phase devant être apportée par le correcteur : $\varphi_m = \Delta\varphi_c - \Delta\varphi_{nc}$

$$\sin(\Delta\varphi_c - \Delta\varphi_{nc}) = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow a = \frac{1 + \sin(\Delta\varphi_c - \Delta\varphi_{nc})}{1 - \sin(\Delta\varphi_c - \Delta\varphi_{nc})} \Rightarrow \text{Réglage de } a$$

Si aucune autre spécification alors $\omega_m = \omega_{nc}$ (pas de changement de la BP)

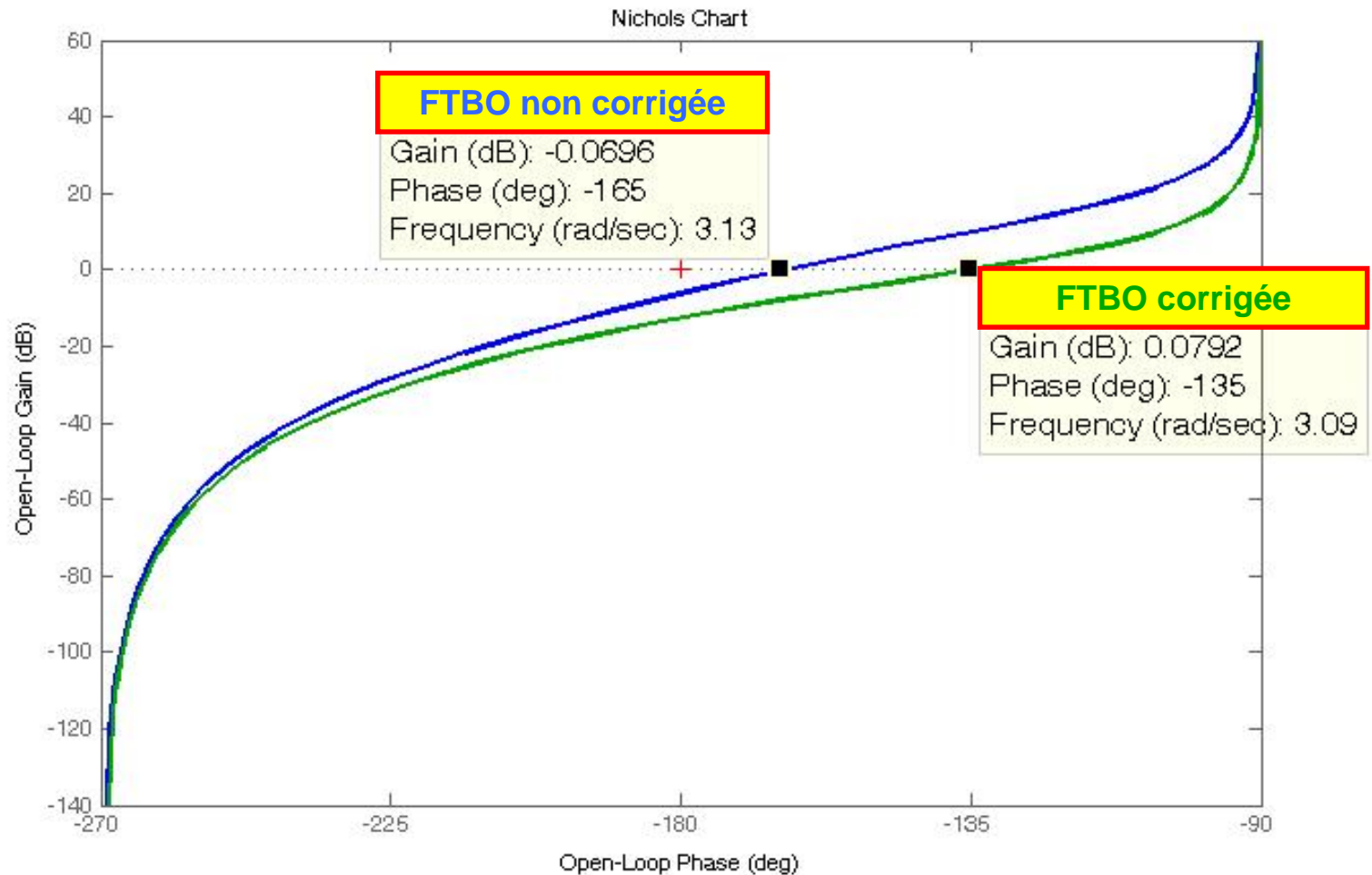
$$\omega_{nc} = \frac{1}{\tau \sqrt{a}} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_{nc} \sqrt{a}} \Rightarrow \text{Réglage de } \tau$$

$$G_{c(\text{dB})}(\omega_{nc}) = 0\text{dB}$$

$$\Leftrightarrow G_{nc(\text{dB})}(\omega_{nc}) + G_{AP(\text{dB})}(\omega_{nc}) = 0\text{dB}$$

$$\Leftrightarrow G_{AP(\text{dB})}(\omega_{nc}) = 0\text{dB} \Rightarrow K_c = \frac{1}{\sqrt{a}} \Rightarrow \text{Réglage de } K_c$$

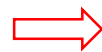
Correcteur à avance de phase (6/7)



Correcteur à avance de phase (7/7)

Une fois la valeur de « a » calculée, si d'autres spécifications sont à considérer

- Sur la précision : application du théorème de la valeur finale à l'erreur ε



Réglage de K_c

- Sur la rapidité : $\omega_c = \omega_{\text{cdc}}$ (changement de la BP)

$$\tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{a}}$$



Réglage de τ

Les valeurs des paramètres restants sont à calculer à partir de :

$$G_{\text{c(dB)}}(\omega_c) = 0\text{dB} \implies G_{\text{AP(dB)}}(\omega_c) + G_{\text{nc(dB)}}(\omega_c) = 0\text{dB} \implies G_{\text{nc(dB)}}(\omega_c) = -G_{\text{AP(dB)}}(\omega_c)$$

Le prédicteur de Otto J. M. Smith (1917-2009) (1/7)

Dans certains cas, il arrive que le système présente un retard pur : c'est notamment le cas de tous les systèmes avec déplacement de matière.

Exemple : chauffage d'une pièce à partir d'un radiateur alimenté en eau chaude par une chaudière n'étant pas à proximité du radiateur :

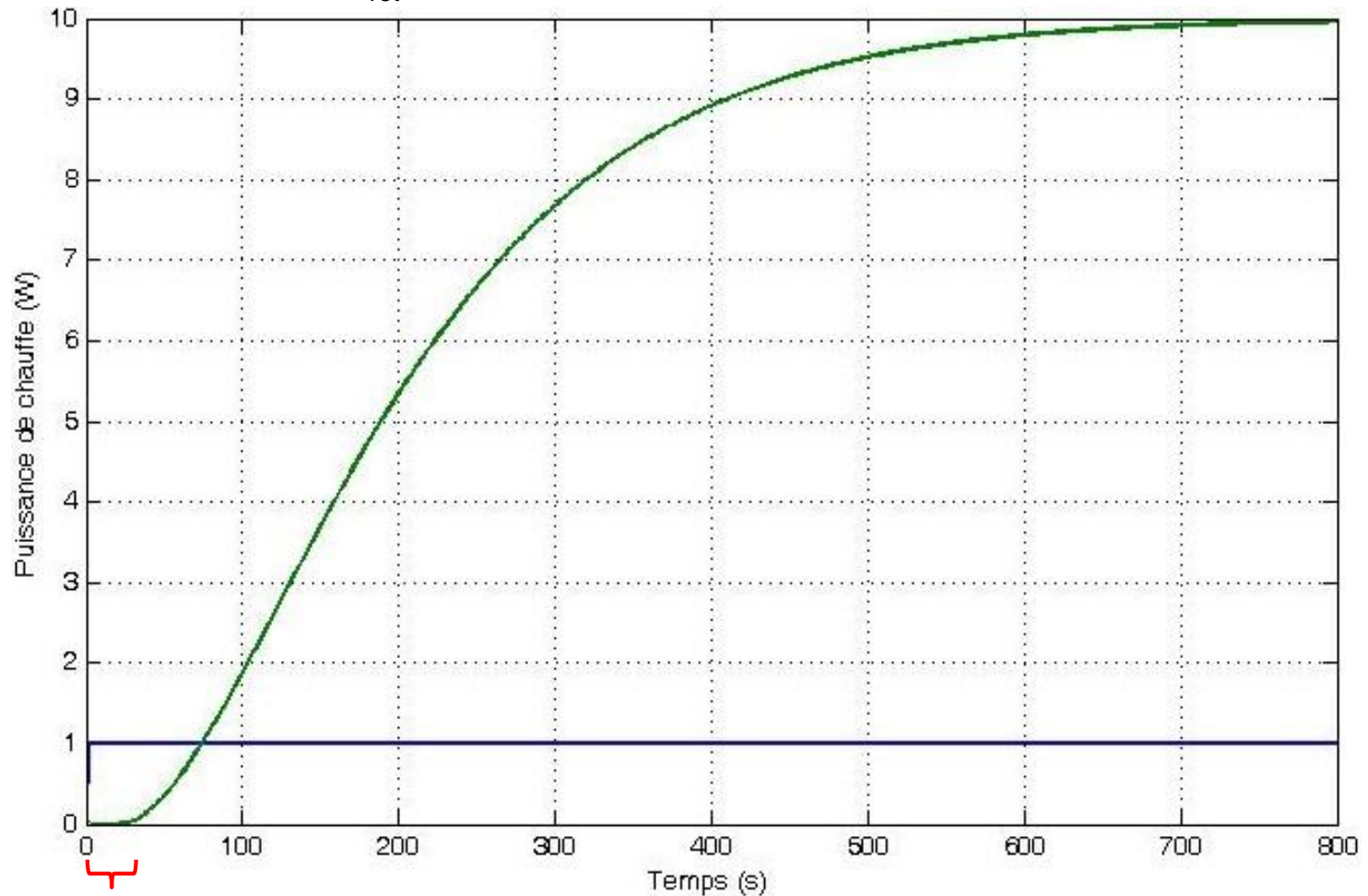
$$F_{ret}(p) = \frac{P(p)}{q(p)} = \frac{K}{(1+Tp)^2} e^{-\tau p}$$

$K = 10 \text{ W} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$
 $T = 100 \text{ s}$
 $\tau = 20 \text{ s}$

Puissance de chauffe du radiateur
 Débit en sortie de la chaudière
 Retard dû au temps de circulation de l'eau de la chaudière vers le radiateur

Le prédicteur de Smith (2/7)

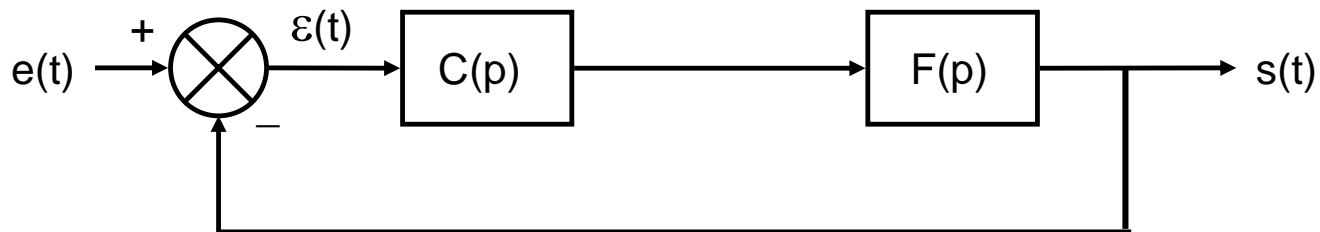
Réponse indicielle de $F_{\text{ret}}(p)$:



Retard

Le prédicteur de Smith (3/7)

On effectue une régulation avec, par exemple, un correcteur proportionnel intégral :



$$F_{ret}(p) = \frac{10}{(1+100p)^2} e^{-20p} \quad C(p) = 1 + \frac{1}{330p}$$

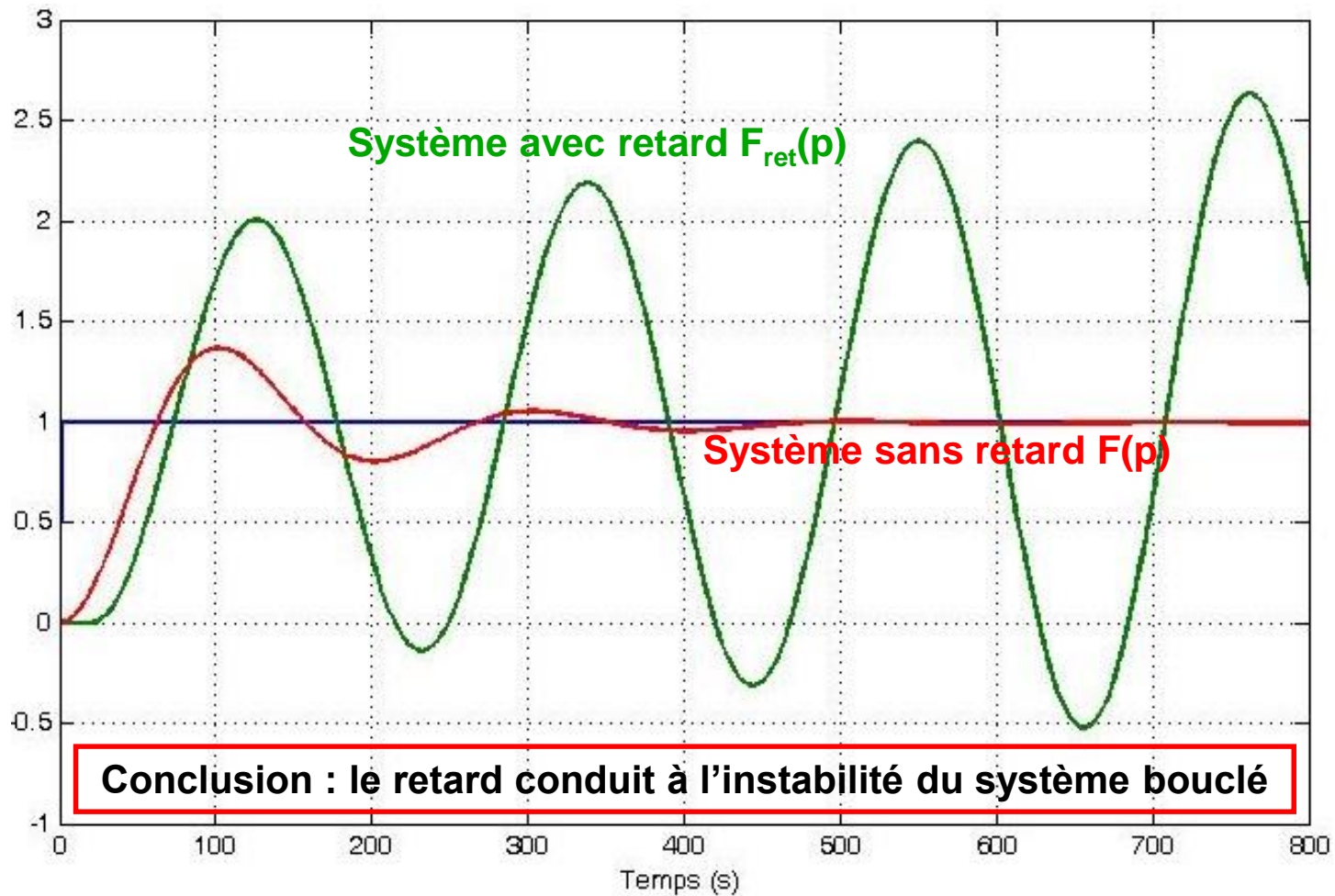
On introduit également la fonction de transfert sans retard $F(p)$:

$$F(p) = \frac{10}{(1+100p)^2}$$

de sorte que : $F_{ret}(p) = F(p)e^{-20p}$

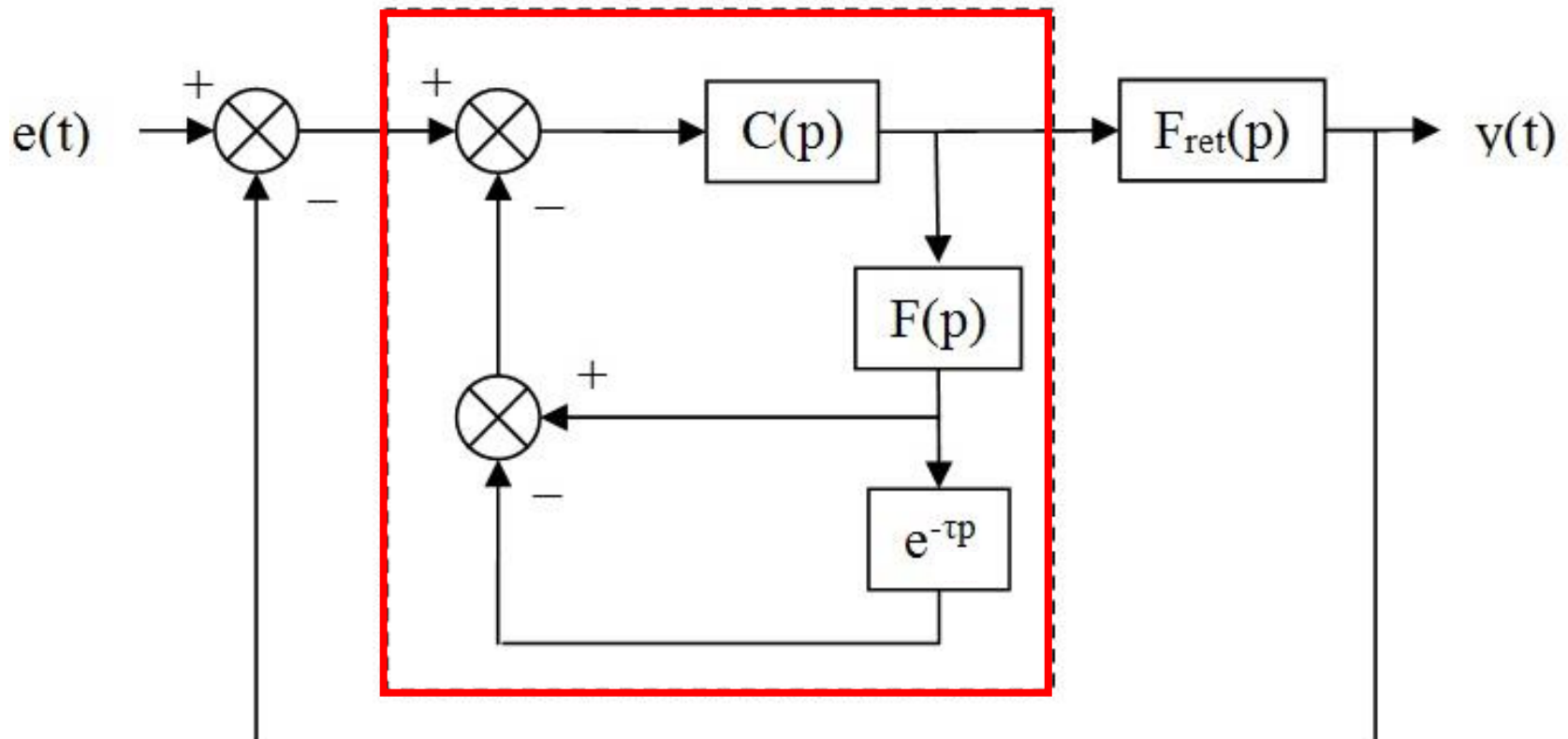
Le prédicteur de Smith (4/7)

Réponse indicielle avec correcteur PI en boucle fermée :



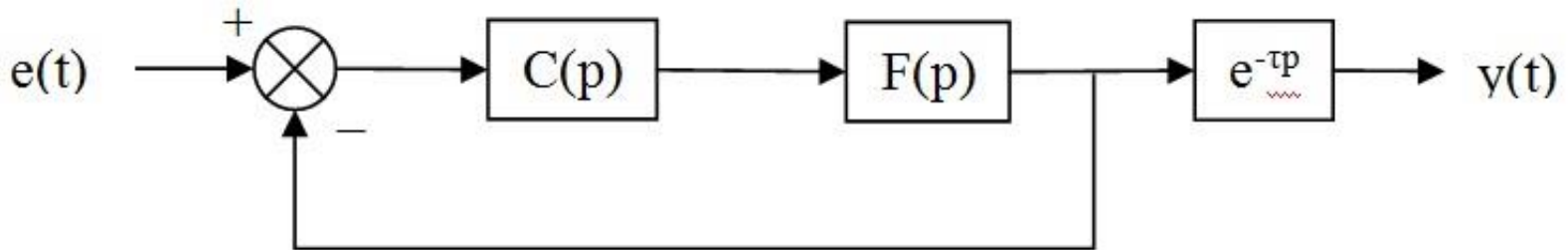
Le prédicteur de Smith (5/7)

Pour palier cet inconvénient, on utilise la structure ci-dessous appelée « prédicteur de Otto J. M. Smith (1917-2009) » :



Le prédicteur de Smith (6/7)

On montre que ce schéma bloc est équivalent à :



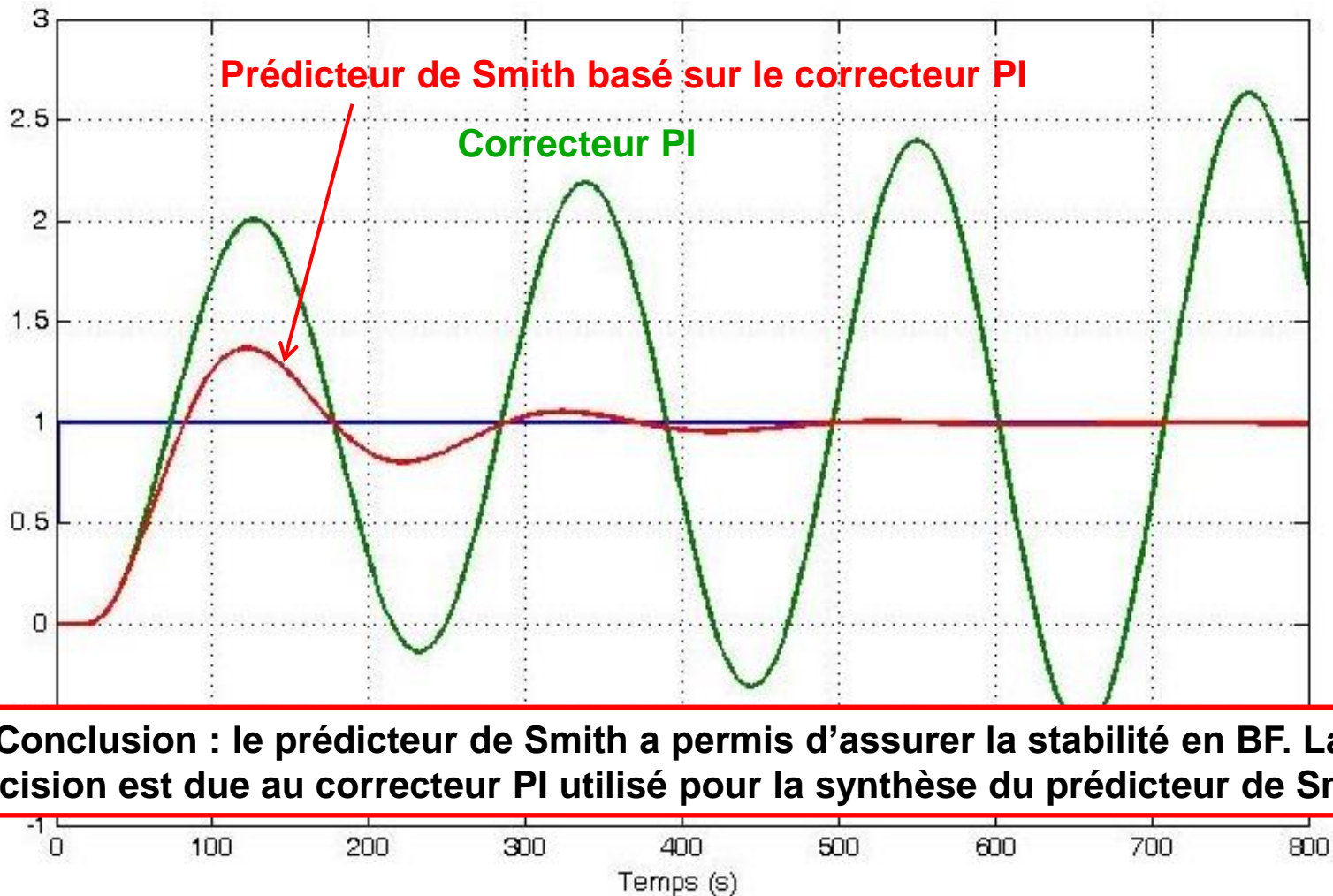
Ainsi, le prédicteur de Smith consiste à :

- Elaborer un correcteur $C(p)$ adapté à la fonction sans retard $F(p)$ (pas nécessairement un PI) et effectuer la régulation sur le système sans retard
- Prendre en compte dans un deuxième temps le retard $e^{-\tau p}$

En pratique, la réalisation d'un prédicteur de Smith consiste à mettre en œuvre la structure de correcteur série encadrée en rouge dans la diapositive précédente.

Le prédicteur de Smith (7/7)

Réponse indicielle en boucle fermée de la fonction avec retard $F_{\text{ret}}(p)$:



Conclusion : le prédicteur de Smith a permis d'assurer la stabilité en BF. La précision est due au correcteur PI utilisé pour la synthèse du prédicteur de Smith

Choix d'un correcteur

Le choix d'un correcteur approprié dépend du contexte donné. Il n'y a pas de solution unique, cependant, on adoptera en général les principes suivant :

- prendre la structure la plus simple possible,
- si la correction doit s'effectuer uniquement sur la stabilité, prendre de préférence un correcteur A.P. (réglage précis de la marge de phase) ou éventuellement P.D.
- si la correction doit s'effectuer sur la rapidité, prendre un correcteur A.P. ou P.D. (si action rigoureuse),
- si la correction doit s'effectuer uniquement sur la précision statique, prendre de préférence un correcteur P.I. (intégration annulant l'erreur permanente) ou éventuellement R.P. (le correcteur R.P. n'agit pas aux hautes fréquences et ne modifie donc pas la réponse transitoire),
- si la correction doit affecter l'ensemble des aspects, prendre un correcteur A.R.P. ou P.I.D.
- si le système présente un retard pur, utiliser un prédicteur de Smith.

Chapitre 3 : A vous de jouer...

Préparation (à l'aide des documents mis sur ENT) :

- TD 3 : Correcteurs PI et PID
- TD 4 : Correcteurs à avance / retard de phase
- TP 3 : Contrôle de température d'un échangeur thermique
- TP 4 : Contrôle de la vitesse d'un moteur à courant continu
- TP 5 : Contrôle de la vitesse d'un moteur électrique de VFN
- Travail personnel 2 : Contrôle du tangage et du roulis d'un aéronef
- Travail personnel 3 : Contrôle d'un axe de bras de robot

Chapitre 4

La transformée en z

Chapitre 4 : Acquis d'apprentissage visés

Etre capable, à l'issue du chapitre, de :

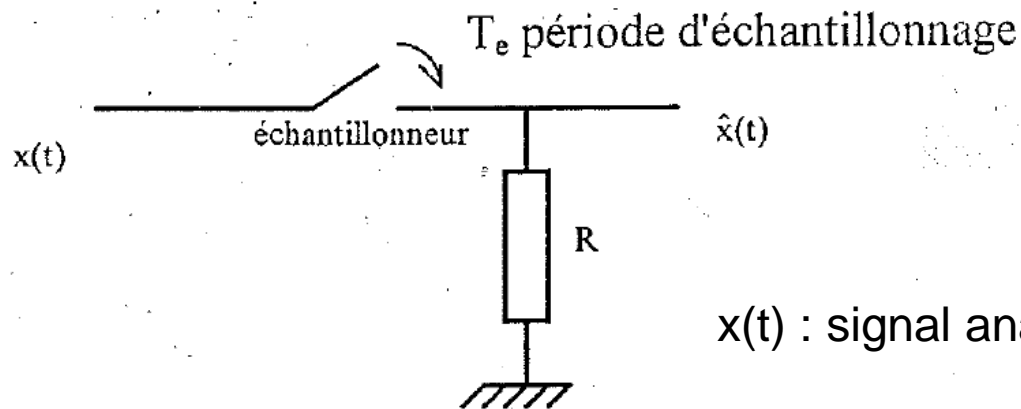
- Calculer la transformée en z d'une fonction donnée
- Générer l'équation aux différences d'un système discret à partir de sa fonction de transfert en z .
- Déterminer la réponse en fréquence d'un système discret

Echantillonnage des signaux (1/2)

Principe :

Prélever les valeurs d'un signal à intervalles définis, généralement réguliers.

Exemple :



$x(t)$: signal analogique à échantillonner

$\hat{x}(t)$: signal échantillonné

Remarque : on ne connaît de $x(t)$ qu'une suite de N échantillons qui doit être représentative du signal analogique

Echantillonnage des signaux (2/2)

Théorème de Claude SHANNON (1916-2001) :

La reconstitution d'un signal à partir de ses échantillons est possible à condition que la fréquence d'échantillonnage F_e soit supérieure ou égale à deux fois la plus haute fréquence F_{\max} contenue dans le spectre de ce signal :

$$2 F_{\max} \leq F_e$$

Dans la pratique :

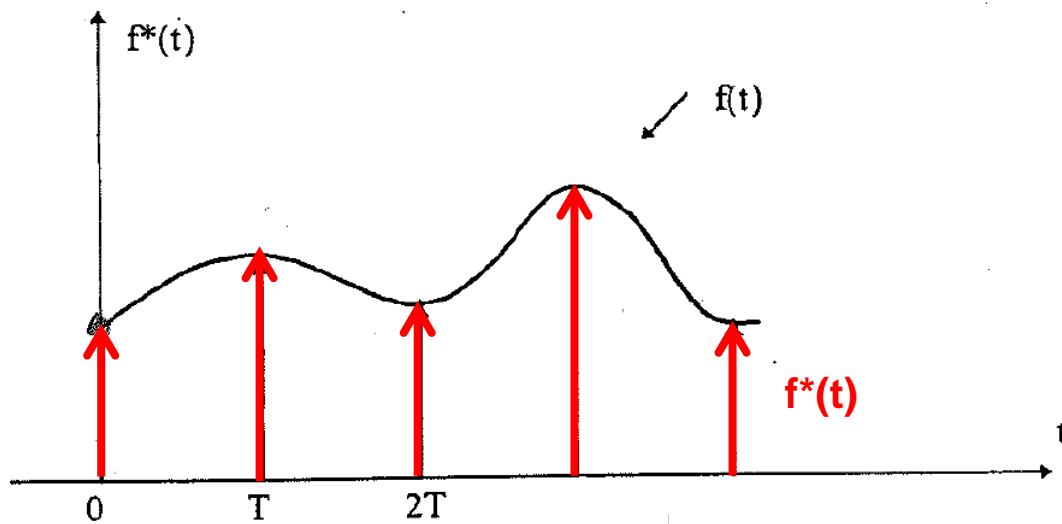
$$2,5.F_{\max} \leq F_e \leq 5.F_{\max}$$

Définition de la transformée en z (1/2)

On définit la transformée en z d'une fonction f définie aux instants discrets nT à partir de la fonction échantillonnée suivante :

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) \delta(t - nT)$$

où T est la période d'échantillonnage



Définition de la transformée en z (2/2)

La transformée de Laplace de $f^*(t)$ s'écrit :

$$L[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) L[\delta(t - nT)]$$

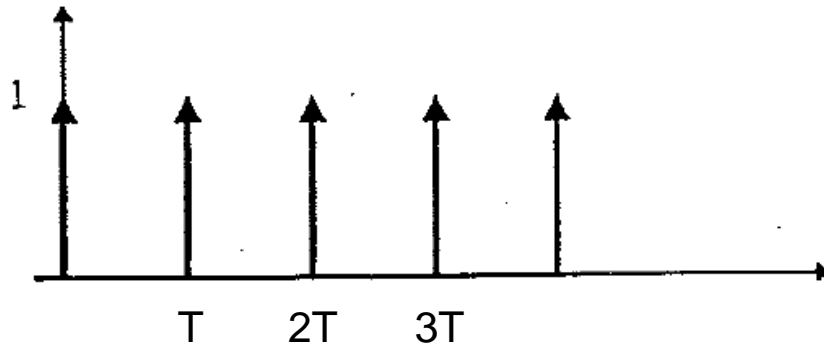
$$L[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) e^{-nTp}$$

En posant $z = e^{Tp}$, il vient :

$$Z[f(t)] = L[f^*(t)] \Big|_{z=e^{Tp}} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT) z^{-n}$$

La série en puissances négatives définissant la transformée en z est définie pour un rayon de convergence ρ et convergera pour $z > 1 / \rho$

Exemple (1/2) : échelon unité $f(t) = u(t)$



$$F(z) = Z[f(t)] = Z [u(t)]$$



$$Z[u(t)] = 1 + z^{-1} + \dots + z^{-n} + \dots$$

Suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison z^{-1} qui convergera si : $|z| > 1$

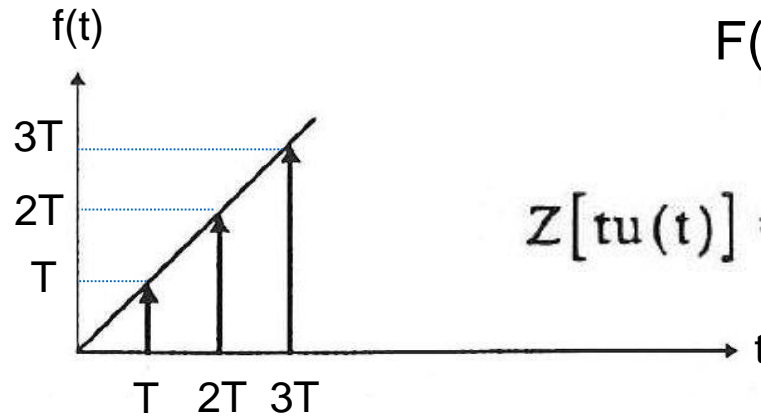
Rappel :

$$\sum_{k=0}^n u_k = u_0 + \dots + u_n = u_0(1 + q + \dots + q^n) = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (q \neq 1)$$



$$Z[u(t)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Exemple (2/2) : rampe unité $f(t) = t \cdot u(t)$



$$F(z) = Z[f(t)] = Z[t \cdot u(t)]$$



$$Z[tu(t)] = Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \dots + nTz^{-n} + \dots \quad (1)$$

$$z Z[f(t)] = z Z[tu(t)] = T + 2Tz^{-1} + \dots + nTz^{-(n-1)} + \dots \quad (2)$$

$$(2) - (1): \quad z F(z) - F(z) = T + Tz^{-1} + Tz^{-2} + \dots + Tz^{-n} + \dots$$

$$(z - 1) F(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

$$\frac{(1 - z^{-1})}{z^{-1}} F(z) = \frac{T}{1 - z^{-1}}$$

$$F(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

Transformées de fonctions usuelles

$f(t)$	$F(p)$	$F(z)$
$\delta(t)$	1	1
$\delta(t - nT)$	e^{-nTp}	z^{-n}
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{t^2}{2!}$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2 z (z+1)}{2(z-1)^3}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$
$t e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$	$\frac{Tz e^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$
$u(t) e^{-at}$	$\frac{a}{p(p+a)}$	$\frac{(1 - e^{-aT})z}{(z-1)(z - e^{-aT})}$

$$\sin(\omega t) \rightarrow \frac{\sin(\omega T) z}{z^2 - 2 \cos(\omega T) z + 1}$$

$$\cos(\omega t) \rightarrow \frac{z - \cos(\omega T)}{z^2 - 2 \cos(\omega T) z + 1}$$

$$a^t \rightarrow \frac{z}{z-a}$$

où T est la période d'échantillonnage

Remarque sur la notation :

- Mathématique : $F(z)$
- Physique : $F(z^{-1})$

Transformées de suites usuelles

Suites	Transformée en z	Suites	Transformée en z
$u_0 = 1$ $u_n = 0$ si $n > 0$	1	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$
$u_k = 1$ $u_n = 0$ si $n \neq k$	z^{-k}	$\cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - z \cos(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$
1	$\frac{z}{z-1}$	$\sin(\omega n)$	$\frac{z \sin(\omega)}{z^2 - 2z \cos(\omega) + 1}$
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	$a^n \cos(\omega n)$	$\frac{z^2 - az \cos(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$a^n \sin(\omega n)$	$\frac{az \sin(\omega)}{z^2 - 2az \cos(\omega) + a^2}$

Propriétés de la transformée en z

Linéarité :

$$Z[a_1f_1(t) + a_2f_2(t)] = a_1Z[f_1(t)] + a_2Z[f_2(t)]$$

Retard de n périodes :

$$Z[f(t - nT)] = z^{-n}F(z)$$

Théorème de la valeur initiale :

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} F(z)$$

Application des théorèmes

Exemple

Soit :
$$F(z) = \frac{1}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}}$$

• Valeur initiale :

$$f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \lim_{z^{-1} \rightarrow 0} F(z) = 1$$

• Valeur finale :

$$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{(1 - z^{-1})(1 - 0.2z^{-1})} = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

Transformée en z inverse (1/2)

Remarque : Toutes les fonctions passant par les mêmes points d'échantillonnage admettent la même transformée en z.

Il n'y a pas unicité de l'original

Méthode 1 :

- 1) Décomposition de la fonction (en éléments simples)
- 2) Utilisation des tables de transformées de fonctions usuelles

Exemple :

$$F(z) = \frac{2z^2 + z(T-2)}{z^2 - 2z + 1} = \frac{2z}{z-1} + \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$f(nT) = 2u(nT) + nT u(nT)$$

Transformée en z inverse (2/2)

Méthode 2 :

1) Division euclidienne selon les puissances décroissantes

Exemple :

$$F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

$$\begin{array}{r|l}
 Tz & z^2 - 2z + 1 \\
 \hline
 Tz^1 - 2T + Tz^{-1} & Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + \dots \\
 \hline
 2T - Tz^{-1} & \\
 - & \\
 2T - 4Tz^{-1} + 2Tz^{-2} & \\
 \hline
 \dots &
 \end{array}$$

Remarque : méthode permettant de calculer les premiers termes de la fonction f

Résolution d'équations aux différences

Principe : Utilisation de la transformée en z similaire à celle de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles.

Exemple : $y(n) + y(n-1) = e(n-1)$ où

$\left\{ \begin{array}{l} T = 1 \text{ s} \\ e(n) \text{ est la fonction rampe à pente unité} \\ \text{Condition initiale : } y(0)=0 \end{array} \right.$

On pose : $Y(z) = Z[y(n)]$ et $E(z) = Z[e(n)]$ avec $E(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$

$$Z[y(n)] + Z[y(n-1)] = Z[e(n-1)]$$

$$Y(z) + z^{-1}Y(z) = z^{-1}E(z)$$

$$Y(z)(1 + z^{-1}) = z^{-1}E(z) = z^{-1} \frac{z}{(z-1)^2}$$

Résolution d'équations aux différences

$$Y(z)(1 + z^{-1}) = z^{-1}E(z) = z^{-1} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} z^{-1} \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{z+1} \frac{z}{(z-1)^2} \xrightarrow{\text{Déc. éléments simples}} Y(z) = -\frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{4(z-1)} + \frac{1}{2(z-1)^2}$$

$$Y(z) = \frac{1}{4} \left(-z^{-1} \frac{z}{(z+1)} + z^{-1} \frac{z}{(z-1)} + z^{-1} \frac{2z}{(z-1)^2} \right)$$

$$y(n) = \frac{1}{4} \left[-(-1)^{(n-1)} + (1)^{(n-1)} + 2(n-1) \right] \rightarrow y(n) = \frac{1}{4} [(-1)^n + 2n - 1]$$

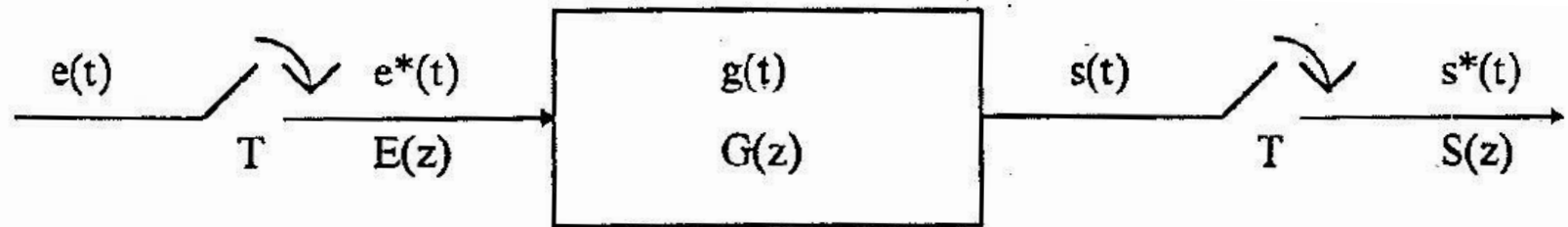
Fonction de transfert en z

Pour les systèmes continus : $G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \Leftrightarrow s(t) = g(t) * e(t)$

où $g(t)$ est la réponse impulsionnelle du système

Rappel : $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)g(t) dt$

Pour les systèmes discrets :



Produit de convolution : $s(n) = \sum_{k=0}^n e(k) g(n - k)$

Fonction de transfert : $G(z) = \frac{S(z)}{E(z)}$

Fonction de transfert en z et équation aux différences (1/2)

Exemple :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{z}{z - 2}$$

$$zS(z) - 2S(z) = zE(z)$$

Obtention de la relation de récurrence :

$$zS(z) - 2S(z) = zE(z)$$



Passage à des puissances négatives de z

$$S(z) - 2z^{-1}S(z) = E(z)$$



Transformée en z inverse

$$s(n) - 2s(n - 1) = e(n)$$

$$s(n) = 2s(n - 1) + e(n)$$

Fonction de transfert en z et équation aux différences (2/2)

Plus généralement :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^q b_j \cdot z^{-j}}$$

$$S(z) \cdot \left[\sum_{j=0}^q b_j \cdot z^{-j} \right] = E(z) \cdot \left[\sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i} \right]$$

$$\sum_{j=0}^q b_j \cdot z^{-j} \cdot S(z) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i} \cdot E(z)$$

$$\sum_{j=0}^q b_j \cdot s(n-j) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e(n-i)$$

$$s(n) = \frac{1}{b_0} \left(\sum_{i=0}^p a_i \cdot e(n-i) - \sum_{j=1}^q b_j \cdot s(n-j) \right)$$

Fonction de transfert en z et réponse en fréquence

Par définition :

$$z = e^{Tp} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} p = j\omega \text{ (variable de Laplace)} \\ \omega = 2\pi f \\ T = 1 / f_e \text{ (} f_e \text{ est la fréquence d'échantillonnage)} \end{array} \right.$$

$$z = e^{2j\pi \frac{f}{f_e}} \quad (1)$$

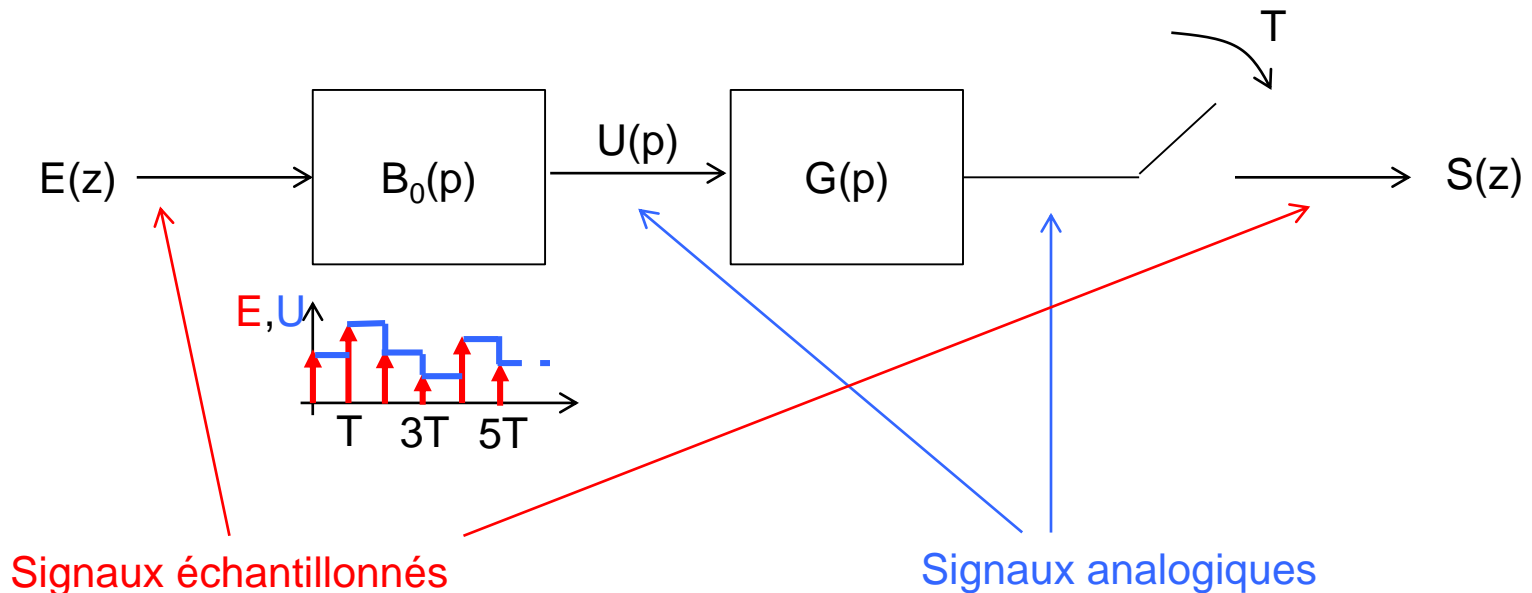
La réponse en fréquence $H(f)$ d'un système discret est obtenue en remplaçant z par (1) dans l'expression de sa fonction de transfert $H(z)$.

Détermination $\left\{ \begin{array}{l} \text{du module } |H(f)| \text{ puis du gain } 20\log(|H(f)|) \\ \text{du déphasage entre entrée et sortie} \end{array} \right.$

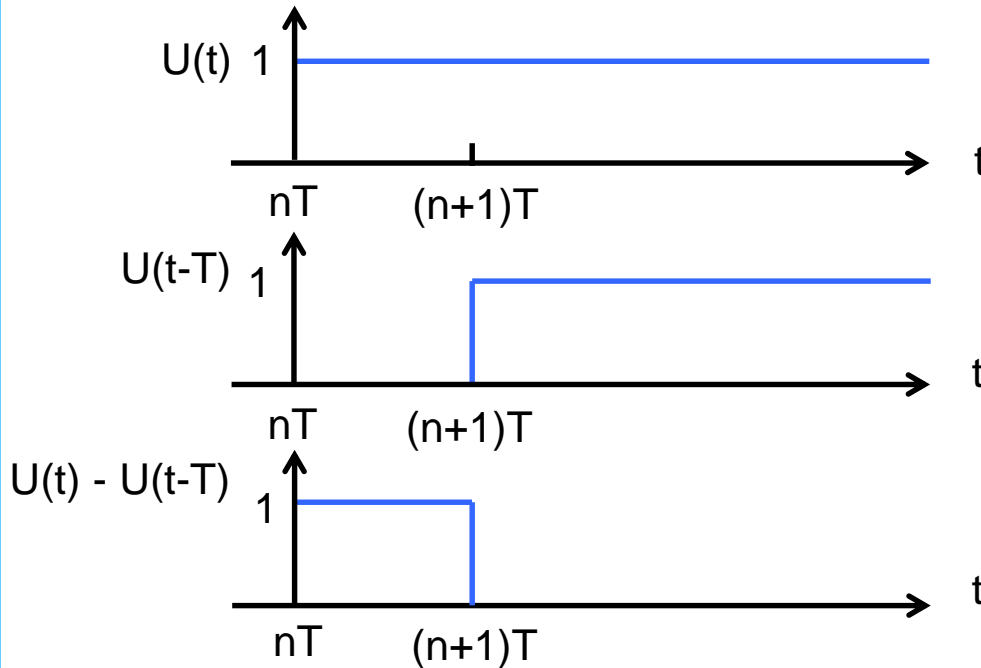
Application aux systèmes de commande (1/3)

A chaque instant nT , le système numérique de commande reçoit un signal $S(z)$ de chacun des capteurs puis calcule un signal de commande $E(z)$ pour chacun des actionneurs.

Ces signaux de commande sont maintenus constants jusqu'à l'instant $(n+1)T$ à l'aide d'un bloqueur d'ordre 0 défini par la fonction B_0



Application aux systèmes de commande (2/3)



Bloqueur d'ordre 0 :

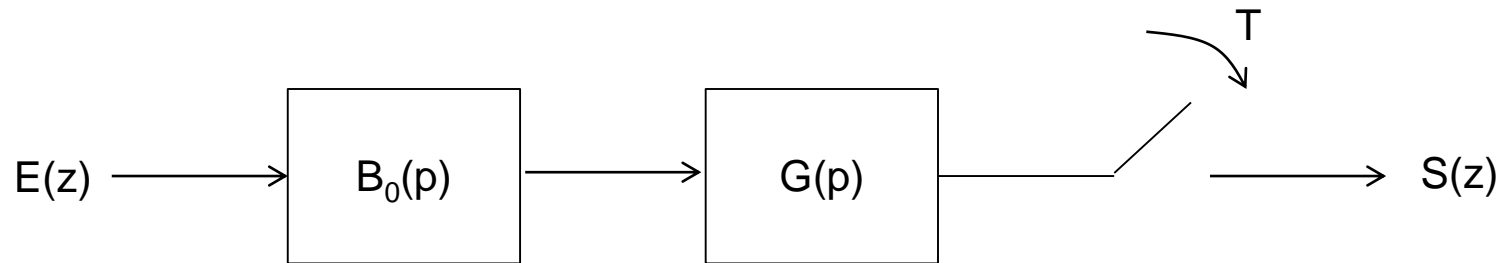
$$B_0(t) = U(t) - U(t - T)$$

Fonction de transfert en p du bloqueur d'ordre 0 :

$$B_0(t) = U(t) - U(t - T) \Rightarrow B_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{e^{-pT}}{p} \Rightarrow B_0(p) = \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

Application aux systèmes de commande (3/3)

Vu du système de commande :



$$S(z) = H(z) \cdot E(z) \quad \text{avec} \quad H(z) = Z[B_0(p) \cdot G(p)]$$

$$H(z) = Z \left[\frac{1 - e^{-pT}}{p} \cdot G(p) \right]$$

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z \left[\frac{G(p)}{p} \right]$$

Chapitre 4 : A vous de jouer...

Préparation (à l'aide des documents mis sur ENT) :

- TD 5 (Calcul de transformées en z)

Chapitre 4 : QCM

Chapitre 5

Synthèse de filtres numériques

Chapitre 5 : Acquis d'apprentissage visés

Etre capable, à l'issue du chapitre, de :

- Calculer des paramètres de filtres RII et RIF à partir d'un CDC.
- Etablir la structure de réalisation optimale d'un filtre numérique

Introduction sur le filtrage numérique (1/2)

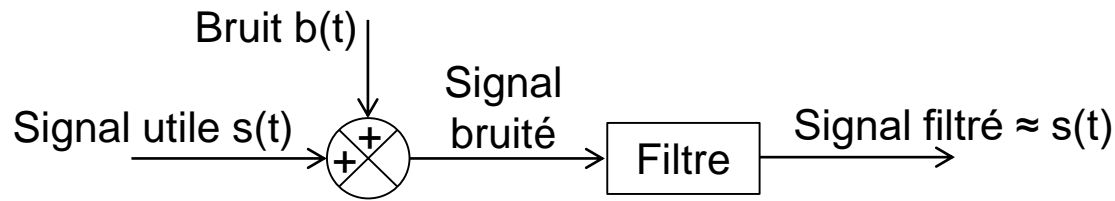
Les filtres sont des systèmes ayant un comportement sélectif vis-à-vis de fréquences. Ils sont utilisés pour mettre en forme une bande passante de fréquences qui sont amplifiées, les autres fréquences étant généralement atténuées. L'objectif est d'extraire, voire d'amplifier, le signal utile à l'utilisateur.

Tout un corps de théorie a été développé par les électroniciens, faisant appel parfois à des fonctions mathématiques particulières. Depuis quelques dizaines d'années, avec l'avancement des techniques numériques, est apparu le filtrage numérique. Si les fonctions de sélection des fréquences restent identiques, les problèmes associés au filtrage numérique sont différents : il s'agit essentiellement de problèmes liés à la numérisation des informations : échantillonnage, quantification, erreurs d'arrondis...

Le filtrage numérique, non sujet aux problèmes de réalisation à travers des circuits électroniques, permet une grande souplesse ainsi qu'une précision adaptable, ce qui est parfois difficile à réaliser avec des composants électroniques limités en taille et en nombre.

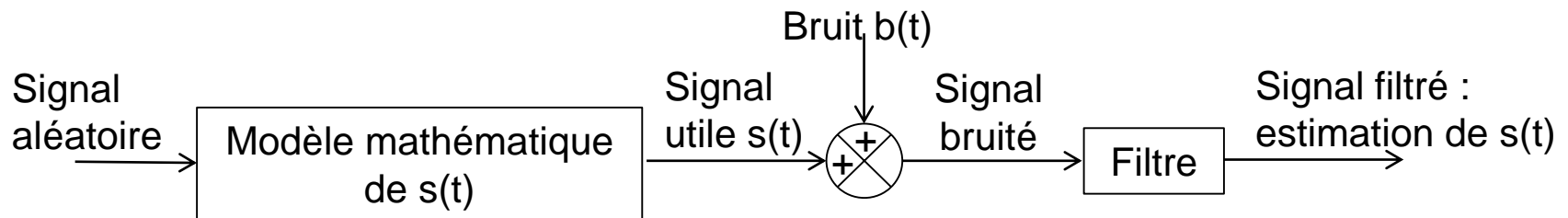
Introduction sur le filtrage numérique (2/2)

Filtrage classique : suppose que le signal utile $s(t)$ se trouve dans une bande de fréquence ayant peu de recouvrement avec les signaux indésirables (bruit $b(t)$) :



On s'intéressera uniquement au filtrage classique dans cette UE

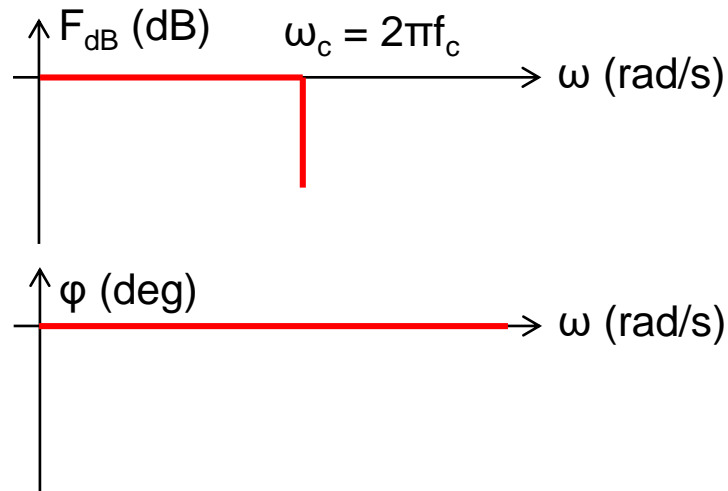
Filtrage statistique : suppose que les signaux indésirables (bruit $b(t)$) possèdent certaines propriétés statistiques :



Théories de Norbert Wiener (1894-1964) et de Rudolf Kalman (1930-2016).

Rappels sur le filtrage analogique classique (1/4)

Le filtre passe-bas idéal : transmet toutes les composantes utiles dans la bande $0 - f_c$.
 (f_c : fréquence de coupure)



Signal de sortie $s(t)$:

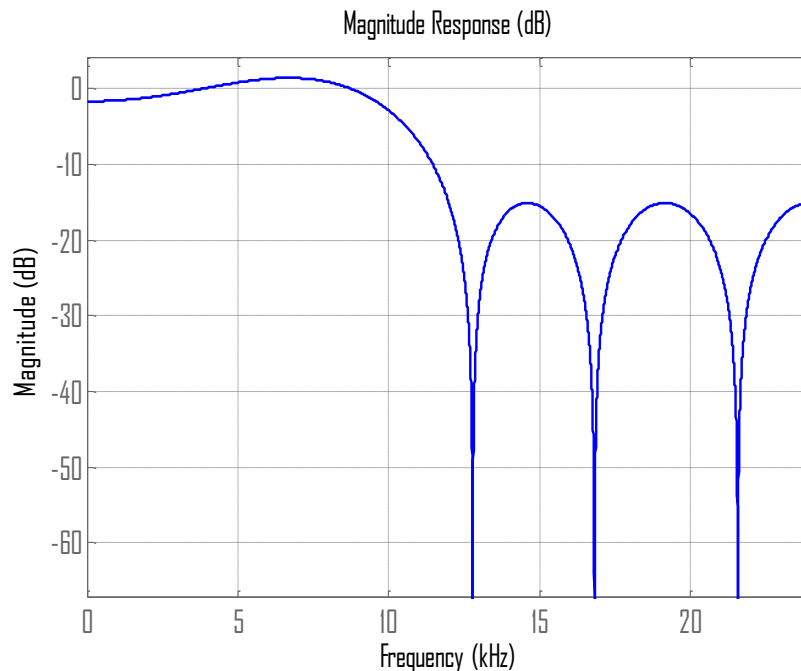
$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot e(t - \tau) d\tau$$

→ Filtre $f(t)$ idéal non réalisable en pratique

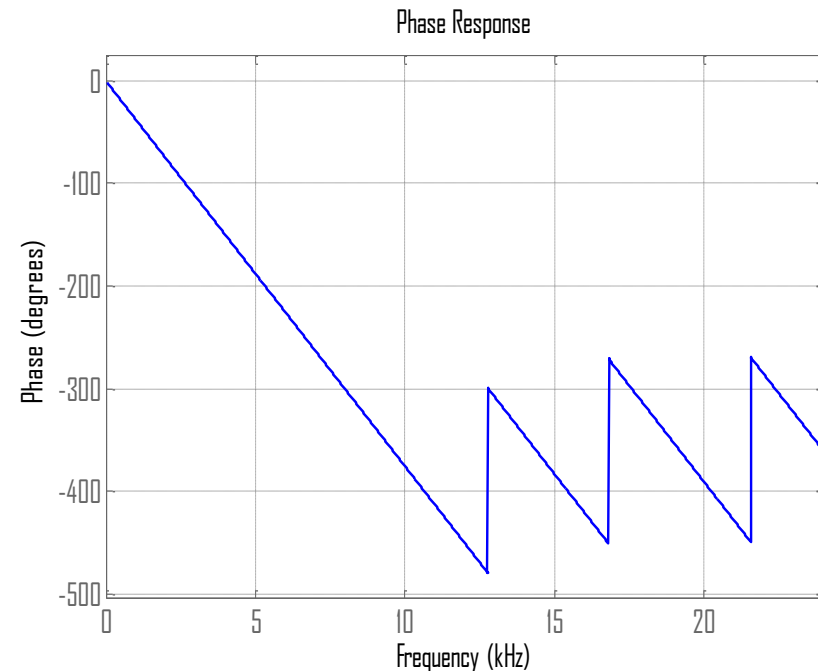
Rappels sur le filtrage analogique classique (2/4)

Filtres classiques réalisables : approximations du filtre idéal

Gain : présence de rebonds,
atténuation non brutale



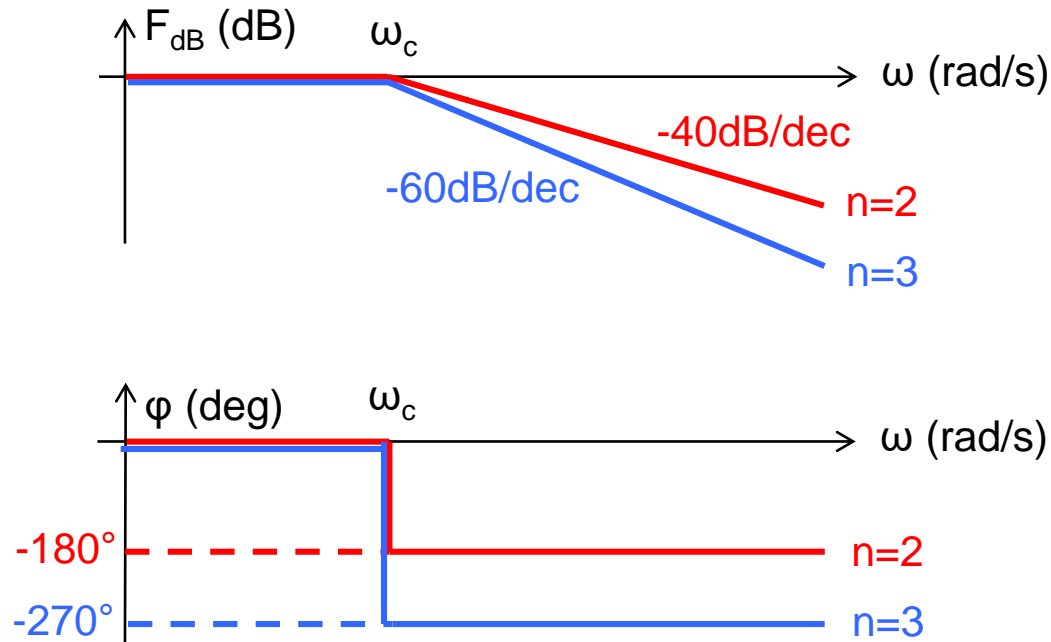
Phase : déphasage introduit par le fait
que le filtre réalisable n'a
connaissance que du passé du signal



Rappels sur le filtrage analogique classique (3/4)

Exemple de filtre passe-bas réalisable : filtre de Stephen Butterworth (1885-1958) :

$$F(p) = \frac{1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad \text{Tel que : } |F(j\omega)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$



Rappels sur le filtrage analogique classique (4/4)

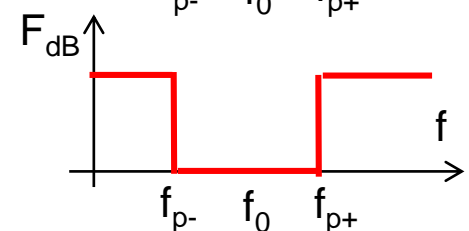
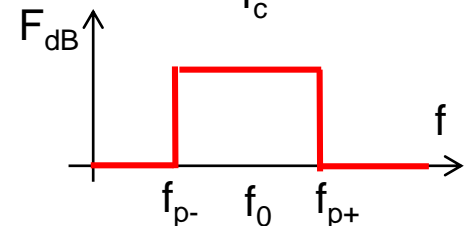
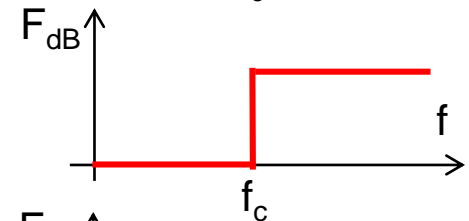
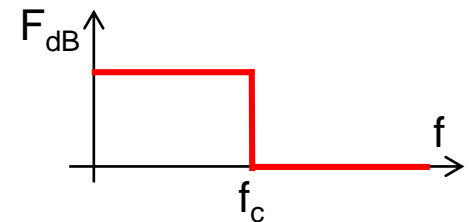
Normalisation des filtres classiques : Soit $F(p)$ un filtre passe-bas normalisé, c'est-à-dire de bande passante $0 - 1$ rad/s.

$F\left(\frac{p}{2\pi f_c}\right)$ Fournit un filtre **passe-bas** de fréquence de coupure f_c .

$F\left(\frac{2\pi f_c p}{1}\right)$ Fournit un filtre **passe-haut** de fréquence de coupure f_c .

$F\left(\frac{1}{B}\left(p + \frac{1}{p}\right)\right)$ Fournit un filtre **passe-bande** symétrique de **largeur** $B = \frac{f_{p+} - f_{p-}}{f_0}$ centré en f_0 .

$F\left(\frac{1}{B}\left(p - \frac{1}{p}\right)\right)$ Fournit un filtre **coupe-bande** symétrique de **largeur** $B = \frac{f_{p+} - f_{p-}}{f_0}$ centré en f_0 .



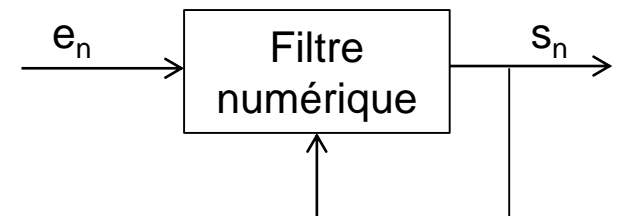
Spécifications d'un filtre numérique (1/3)

Un filtre numérique linéaire est un système dynamique pouvant être représenté de deux manières :

Fonction de transfert en z : $F(z) = \frac{Num(z)}{Den(z)}$ \leftarrow Polynômes en z ou z^{-1}

Equation aux différences : Le filtre est alors caractérisé par des séquences de pondération $\{a_i\}$, $\{b_j\}$, et par la convolution discrète :

$$s_n = s(nT) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i} - \sum_{j=1}^q b_j \cdot s_{n-j}$$



Spécifications d'un filtre numérique (2/3)

Étudions la réponse impulsionnelle du filtre à partir de la séquence de pondération :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i} - \sum_{j=1}^q b_j \cdot s_{n-j} \quad \text{avec : } e_0 = 1, \{e_n = 0, n \geq 1\}$$

On distingue 2 types de réponse impulsionnelle :

Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) : Cela veut dire qu'il existe un entier N_1 tel que $s_n = 0$ pour $n > N_1$. Par conséquent :

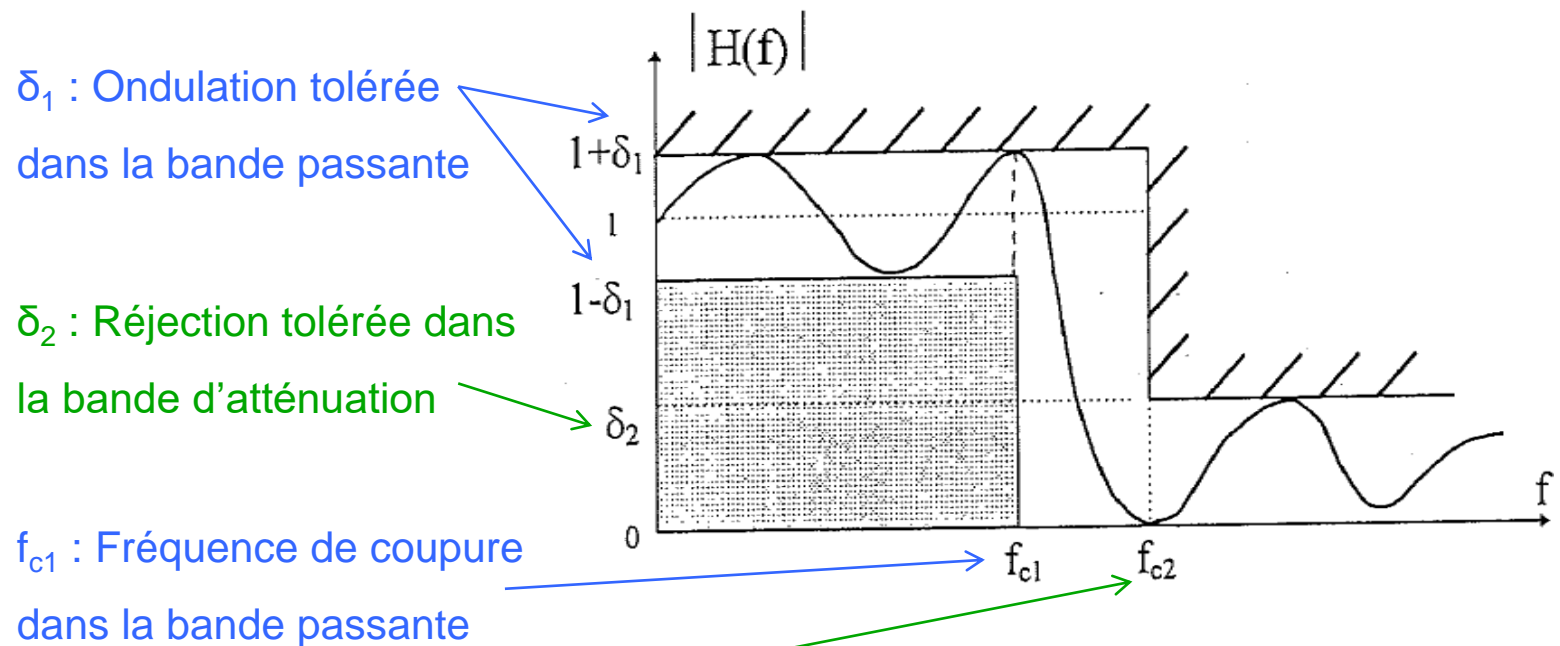
- La séquence de pondération b_j est nulle $\forall j$
- La séquence de pondération a_i est nulle $\forall i \geq N_1$. On a alors $p = N_1$.

Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) : Cela veut dire que $s_n \neq 0$ pour $n \rightarrow +\infty$. Par conséquent :

- Soit il existe au moins un coefficient b_j non nul,
- Soit $p \rightarrow +\infty$ si tous les coefficients b_j sont nuls (non réalisable dans la pratique).

Spécifications d'un filtre numérique (3/3)

Les paramètres d'un filtre, qu'il soit défini par une fonction de transfert ou une séquence de pondération, sont généralement obtenus en fixant **un gabarit**, c'est-à-dire des spécifications dans le domaine fréquentiel sur le module de la réponse en fréquence :



δ_1 : Ondulation tolérée
dans la bande passante

δ_2 : Réjection tolérée dans
la bande d'atténuation

f_{c1} : Fréquence de coupure
dans la bande passante

f_{c2} : Fréquence de coupure
dans la bande d'atténuation

Spécifications $R_{bp} = 20 \log \left(\frac{1 + \delta_1}{1 - \delta_1} \right)$
données par : $R_{ba} = 20 \log(\delta_2)$

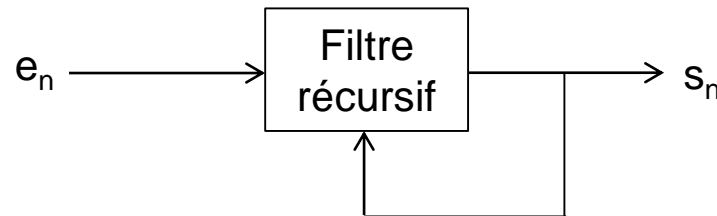
Les filtres récursifs (1/15)

Un filtre récursif est un filtre dont la sortie s_n est obtenue par sommation pondérée :

- d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée $\{e_k\}_{k \leq n}$
- d'un certain nombre d'éléments antérieurs à s_n de la suite de sortie $\{s_k\}_{k \leq n-1}$:

Equation aux différences :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i} - \sum_{j=1}^q b_j \cdot s_{n-j}$$



NB : L'équation aux différences caractérisant le filtre est également appelée « relation de récurrence » du filtre.

Les filtres récursifs (2/15)

Fonction de transfert : A partir de l'équation aux différences :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i} - \sum_{j=1}^q b_j \cdot s_{n-j}$$

$$s_n = a_0 \cdot e_n + a_1 \cdot e_{n-1} + \dots + a_p \cdot e_{n-p} - b_1 \cdot s_{n-1} - \dots - b_q \cdot s_{n-q}$$



Transformée en z

$$S(z) = a_0 E(z) + a_1 z^{-1} E(z) + \dots + a_p z^{-p} E(z) - b_1 z^{-1} S(z) - \dots - b_q z^{-q} S(z)$$

$$\Leftrightarrow [1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}] S(z) = [a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}] E(z)$$

$$\Leftrightarrow F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}}$$

$$\Leftrightarrow F(z) = \frac{\sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i}}{1 + \sum_{j=1}^q b_j \cdot z^{-j}}$$

ou

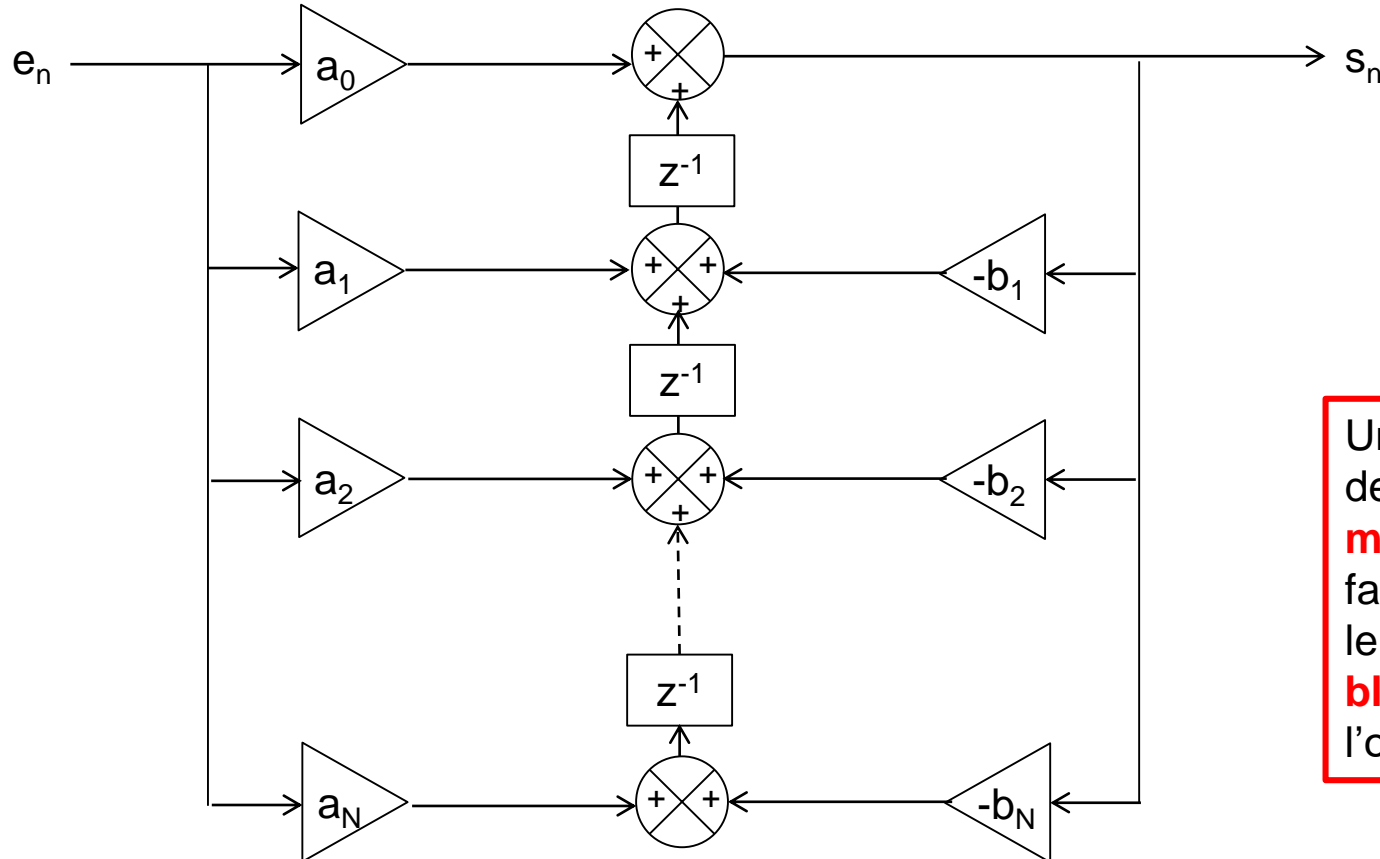
$$F(z) = \frac{\sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i}}{\sum_{j=0}^q b_j \cdot z^{-j}} \quad \text{avec: } b_0 = 1$$

Les filtres récursifs (3/15)

Structure de réalisation optimale :

Afin de simplifier le schéma, on pose $p = q = N$

$$s_n = \sum_{i=0}^N a_i \cdot e_{n-i} - \sum_{j=1}^N b_j \cdot s_{n-j}$$



Une structure de réalisation **minimale** doit faire apparaître le **minimum de blocs z^{-1}** , en l'occurrence N

Les filtres récurrents (4/15)

Exemple (1/4) : Cellule élémentaire du 1^{er} ordre : $s_n = e_n - \beta s_{n-1}$, β : constante réelle.

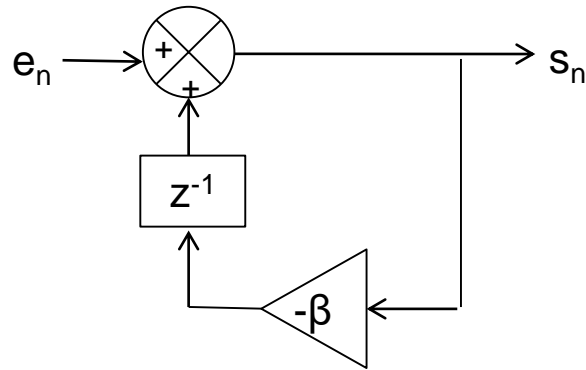
Structure de réalisation ?

Fonction de transfert ?

Les filtres récursifs (4/15)

Exemple (1/4) : Cellule élémentaire du 1^{er} ordre : $s_n = e_n - \beta s_{n-1}$, β : constante réelle.

Structure de réalisation :



Fonction de transfert :

$$S(z) = E(z) - \beta z^{-1} S(z)$$

$$\Leftrightarrow H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{1 + \beta z^{-1}} = \frac{z}{z + \beta}$$

Stabilité : un système de fonction de transfert discrète $H(z)$ est stable si et seulement si ses pôles sont tous de module < 1

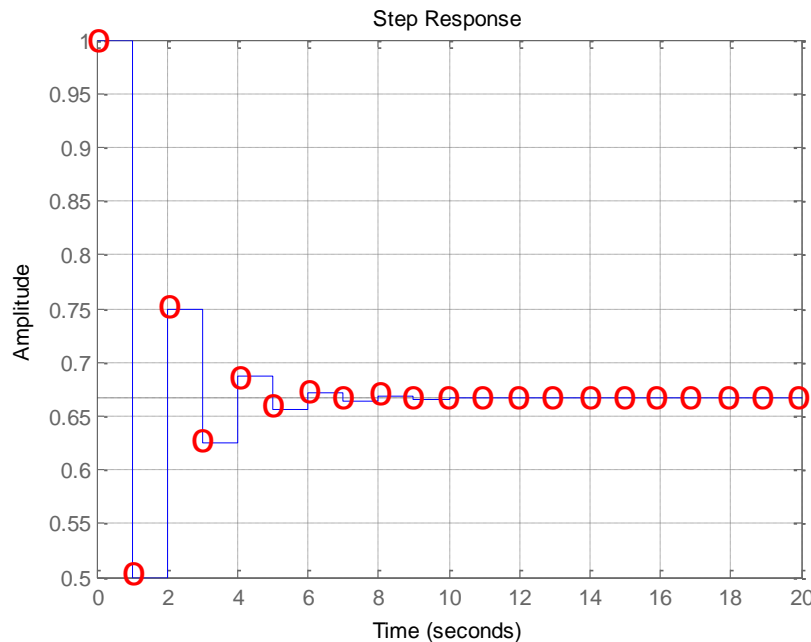
Dans l'exemple : système stable si et seulement si $-1 < \beta < 1$

Les filtres récursifs (5/15)

Exemple (2/4) : Réponse indicielle du filtre.

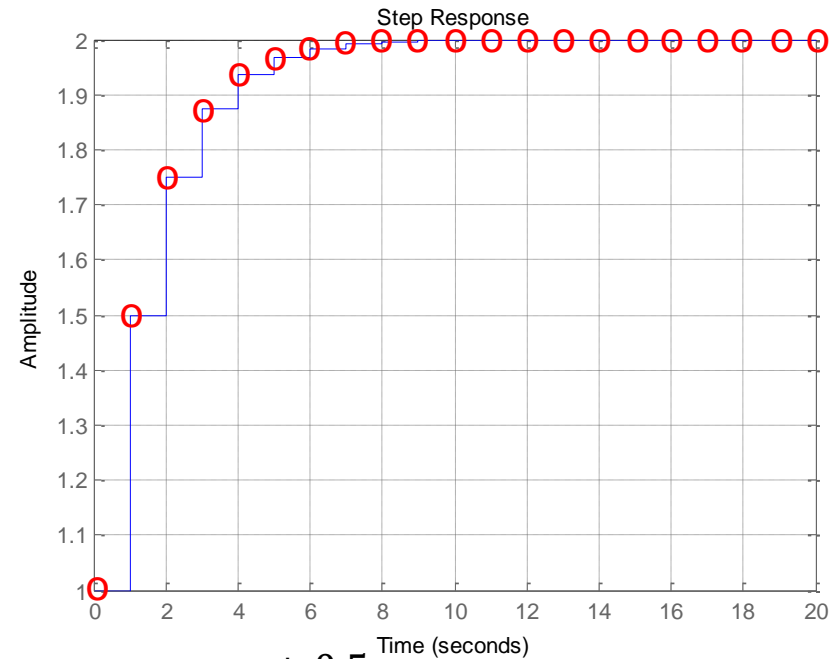
$\beta = 0,5: H(z) = \frac{z}{z + 0,5}$ Pôle : -0,5

$\beta = -0,5: H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$ Pôle : 0,5



$s_n = e_n - 0,5s_{n-1}$

TVF : $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+0,5z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} \right) = 0,66$



$s_n = e_n + 0,5s_{n-1}$

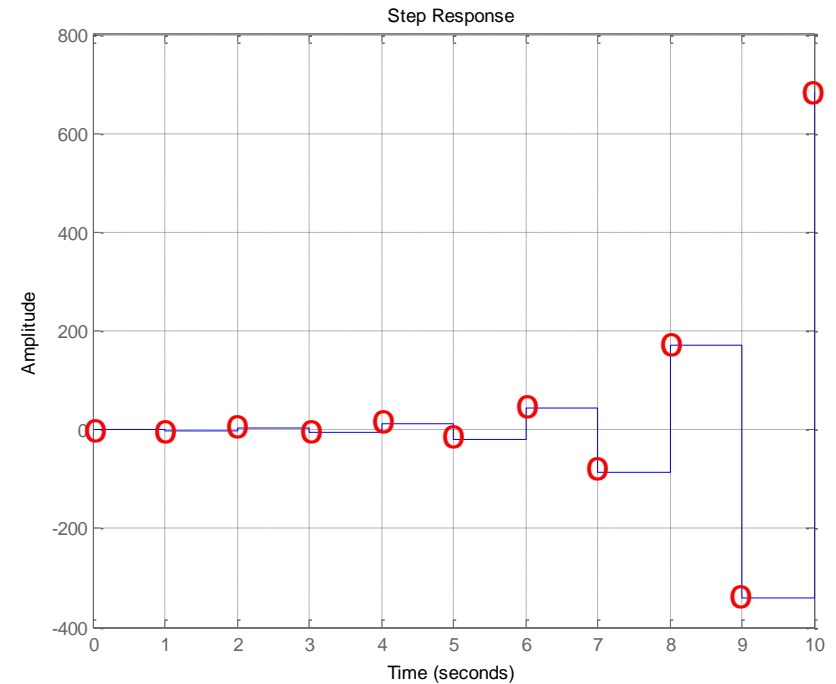
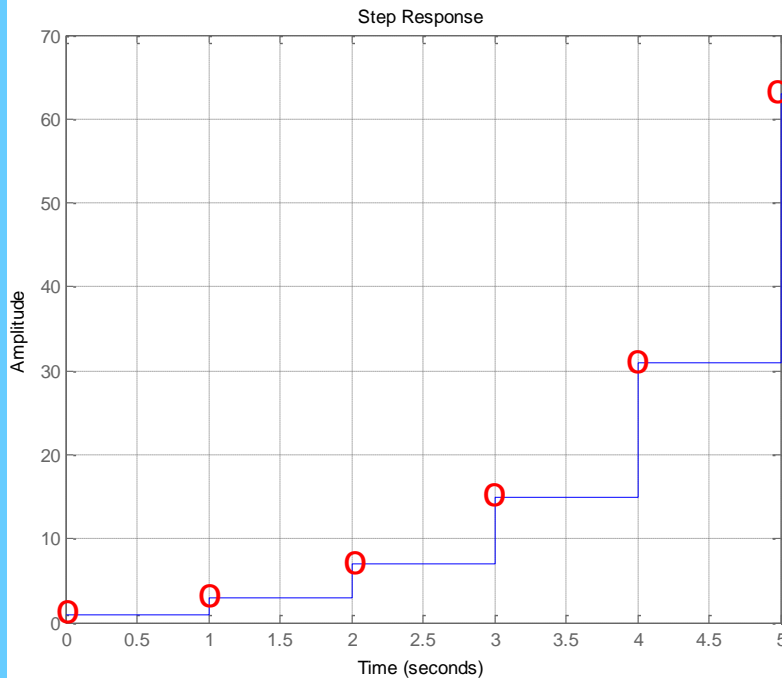
TVF : $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1-z^{-1}}{1-0,5z^{-1}} \frac{1}{1-z^{-1}} \right) = 2$

Les filtres récursifs (6/15)

Exemple (3/4) : Réponse indicielle du filtre.

$$\beta = 2: H(z) = \frac{z}{z + 2} \quad \text{Pôle : } -2$$

$$\beta = -2: H(z) = \frac{z}{z - 2} \quad \text{Pôle : } 2$$

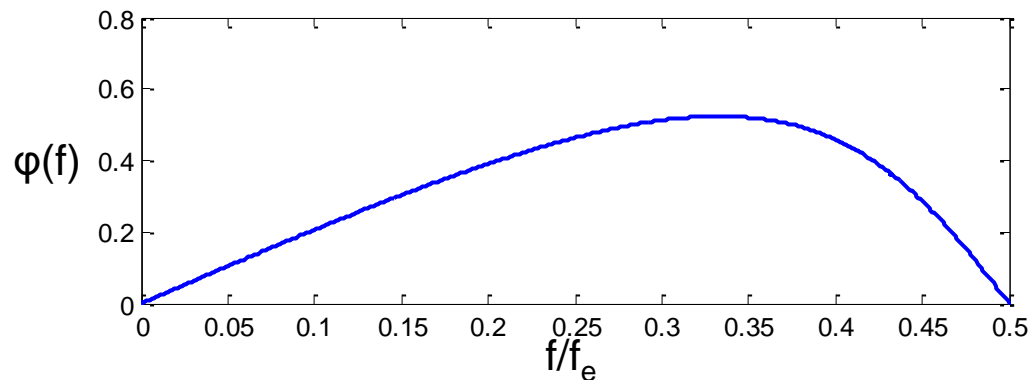
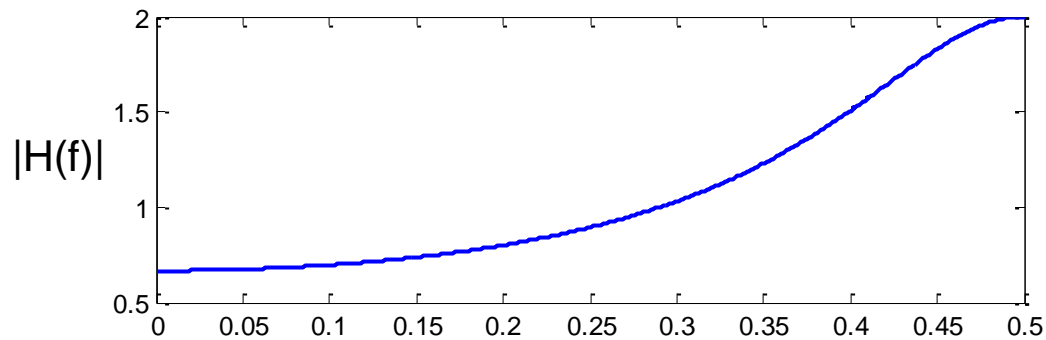


Les filtres récursifs (7/15)

Exemple (4/4) : Réponse en fréquence :

$$H(z) = \frac{z}{z + \beta} \xrightarrow{z = e^{2j\pi\frac{f}{f_e}}} H(f) = \frac{e^{2j\pi\frac{f}{f_e}}}{e^{2j\pi\frac{f}{f_e}} + \beta}$$

$$\begin{cases} |H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 + 2\beta \cos(2\pi f/f_e)}} \\ \varphi(f) = \arg(H(f)) = -\arctan\left(\frac{-\beta \sin(2\pi f/f_e)}{1 + \beta \cos(2\pi f/f_e)}\right) \end{cases}$$



Avec $\beta = 0,5$

Les filtres récursifs (8/15)

Synthèse des filtres récursifs : A partir des fonctions continues $F(p)$ de :

Stephen Butterworth (1885-1958)

Friedrich Bessel (1784–1846)

Pafnuty Chebyshev (1821-1894)

Wilhelm Cauer (1900-1945), ...

connues pour leurs propriétés :

$F(p)$ continue (filtre analogique)



Transformation
continu \rightarrow discret

Transformation en z « classique »

Transformation bilinéaire

$H(z)$ discrète (filtre numérique),
dont les propriétés doivent être
voisines de celles de $F(p)$

Les filtres récursifs (9/15)

Transformation en z « classique » : On utilise les tables de correspondances après avoir décomposé $F(p)$ en éléments simples :

Décomposition en éléments simples

Filtre analogique : $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + \dots + F_N(p)$

↓ Transformée en z :
utilisation des tables



Filtre numérique : $H(z) = H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_N(z)$

Exemple : Filtre analogique du 1^{er} ordre : circuit RC : $F(p) = \frac{1}{1 + RCp} = \frac{1}{RC} \frac{1}{p + \frac{1}{RC}}$

Table de transformée en z

$$H(z) = \frac{1}{RC} \frac{z}{z - e^{-\frac{T_e}{RC}}}$$

Les filtres récursifs (10/15)

Transformation bilinéaire (1/3) : $H(z)$ est obtenue en remplaçant la variable de Laplace p dans $F(p)$ par l'expression : $k \frac{z-1}{z+1}$

Filtre analogique $F(p)$ $\xrightarrow{\text{Transformation bilinéaire}}$ Filtre numérique $H(z) = F\left(k \frac{z-1}{z+1}\right)$

$$p = k \frac{z-1}{z+1}$$

k : Facteur d'échelle

Pourquoi transformation « bilinéaire » ?

$$p = k \frac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \underbrace{pz + p - kz + k}_{= f(p, z)} = 0$$

f : fonction bilinéaire

Exemple : Filtre analogique du 1^{er} ordre :

circuit RC :

$$F(p) = \frac{1}{1 + RCp} \xrightarrow{\text{Transformation bilinéaire}} H(z) = \frac{1}{1 + RCk \frac{z-1}{z+1}} = \frac{z+1}{(1 + RCk)z + (1 - RCk)}$$

Les filtres récursifs (11/15)

Transformation bilinéaire (2/3) : Le coefficient k est un facteur d'échelle : il permet de fixer le choix d'un couple (f_{a0}, f_{d0}) pour lesquelles les réponses en fréquence des filtres analogique et numérique sont égales,

$$k = \frac{2\pi f_{a0}}{\tan\left(\pi \frac{f_{d0}}{f_e}\right)}$$

Exemple du circuit RC : On veut que $f_{a0} = f_{d0} = f_c$: fréquence de coupure : $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$

$$k = \frac{2\pi f_c}{\tan\left(\pi \frac{f_c}{f_e}\right)} = \frac{1}{RC \tan\left(\frac{1}{2RC f_e}\right)}$$

Remarque : les fonctions de transfert obtenues selon les deux méthodes sont toutes les deux du 1^{er} ordre mais ne sont pas identiques.

Les filtres récursifs (12/15)

Transformation bilinéaire (3/3) :

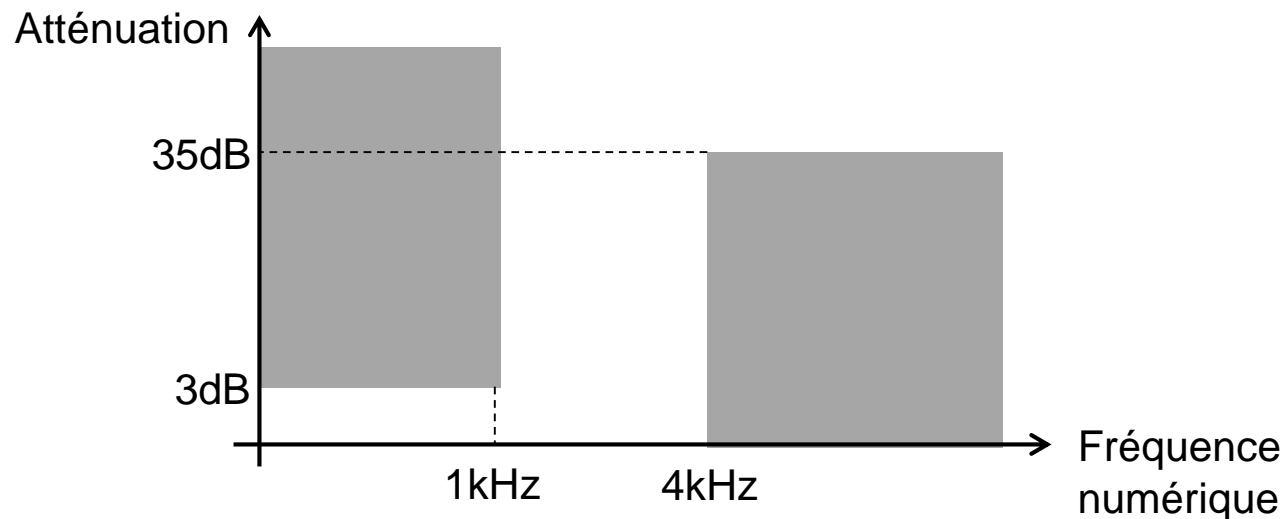
En pratique, pour obtenir la fonction de transfert d'un filtre numérique à l'aide de la transformation bilinéaire, il faut :

1. Prédéformer le gabarit du filtre numérique pour obtenir le gabarit du filtre analogique
2. Déterminer le filtre analogique $H(p)$ satisfaisant au gabarit analogique
3. Appliquer la transformation bilinéaire à $H(p)$ pour obtenir $H(z)$

Les filtres récursifs (13/15)

Transformation bilinéaire – Exemple (1/3) : On veut synthétiser un filtre passe-bas dont le gabarit est défini par :

- Fréquence de coupure : $f_c = 1$ kHz
- Fréquence d'échantillonnage : $f_e = 10$ kHz
- Atténuation minimale de 35dB pour $f \geq f_{d1} = 4$ kHz
- Couple (f_{a0}, f_{d0}) correspondant à la fréquence de coupure : $f_{a0} = f_{d0} = f_c$



Les filtres récursifs (14/15)

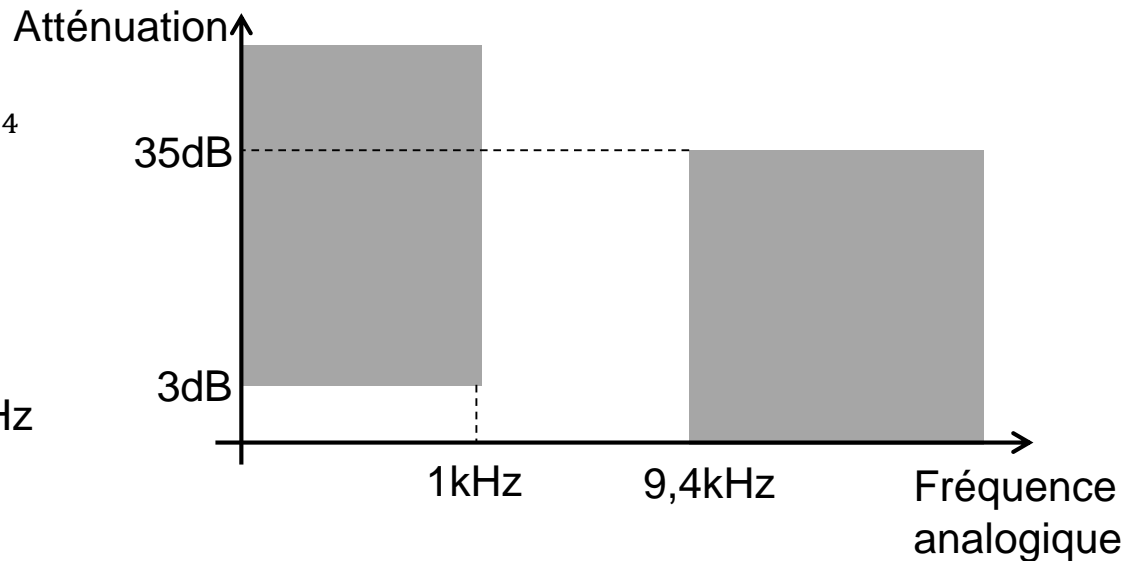
Transformation bilinéaire – Exemple (2/3) :

1. Prédéformation du gabarit

$$k = \frac{2\pi \times 10^3}{\tan\left(\pi \frac{10^3}{10^4}\right)} = 1,93 \times 10^4$$

On en déduit :

$$f_{a1} = \frac{k}{2\pi} \tan\left(\pi \frac{f_{d1}}{f_e}\right) = 9,4 \text{ kHz}$$



2. Calcul du filtre analogique $F(p)$: Un filtre de Butterworth d'ordre 2 convient :

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 1,414p + 1}$$

Les filtres récursifs (15/15)

Transformation bilinéaire – Exemple (3/3) :

3. Détermination du filtre numérique $H(z)$:

$$H(z) = \frac{1}{\left(1,93 \times 10^4 \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 1,414 \times \left(1,93 \times 10^4 \frac{z-1}{z+1}\right) + 1}$$

$$H(z) = 10^{-8} \frac{z^2 + 2z + 1}{3,74z^2 + 7,47z + 3,73} = 10^{-8} \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{3,74 + 7,47z^{-1} + 3,73z^{-2}}$$

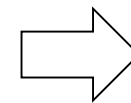
Relation de récurrence : $(3,74 + 7,47z^{-1} + 3,73z^{-2})S(z) = 10^{-8}(1 + 2z^{-1} + z^{-2})E(z)$

$$3,74s_n + 7,47s_{n-1} + 3,73s_{n-2} = 10^{-8}(e_n + 2e_{n-1} + e_{n-2})$$

$$s_n = 2,67 \times 10^{-9}(e_n + 2e_{n-1} + e_{n-2}) - 1,99s_{n-1} - 0,99s_{n-2}$$

Réponse en fréquence :

$$H(f) = 10^{-8} \frac{\left(e^{2j\pi \frac{f}{f_e}}\right)^2 + 2e^{2j\pi \frac{f}{f_e}} + 1}{3,74 \left(e^{2j\pi \frac{f}{f_e}}\right)^2 + 7,47e^{2j\pi \frac{f}{f_e}} + 3,73}$$



$$\begin{cases} |H(z)| \\ \arg(H(z)) \end{cases}$$

Les filtres non récursifs (1/5)

Un filtre non récursif est un filtre dont la sortie s_n est obtenue par sommation pondérée d'un certain nombre d'éléments de la suite d'entrée $\{e_k\}_{k \leq n}$:

Equation aux différences :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i}$$

Le filtre étant non récursif, s_n **ne dépend pas** des éléments antérieurs $\{s_k\}_{k \leq n-1}$

En pratique, comme aucune opération n'est instantanée :

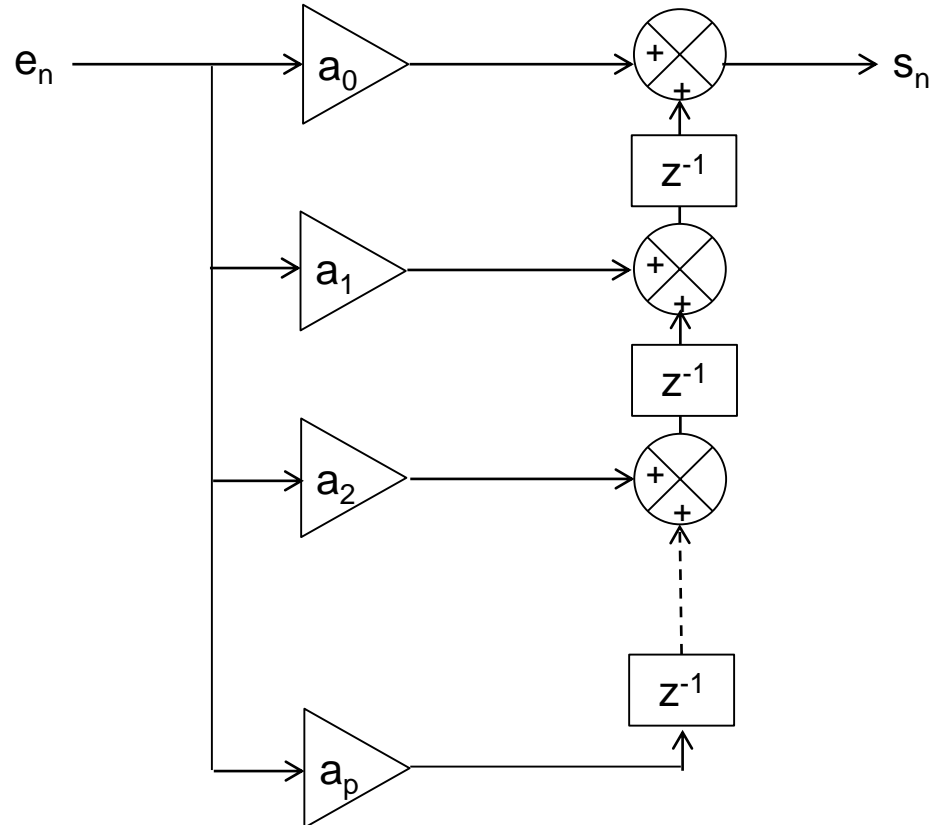
$$s_n = \sum_{i=1}^p a_i \cdot e_{n-i}$$

- Si p est fini, le filtre est à réponse impulsionnelle finie
- Si p est infini, le filtre est à réponse impulsionnelle infinie (cas non réalisable)

Les filtres non récursifs (2/5)

Structure de réalisation optimale :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i}$$



Les filtres non récursifs (3/5)

Séquence de pondération :

La réponse impulsionnelle du filtre est :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i} = a_0 \cdot e_n + a_1 \cdot e_{n-1} + a_2 \cdot e_{n-2} + \dots + a_p \cdot e_{n-p}$$

Avec : $e_0 = 1, \quad e_1 = e_2 = e_3 = \dots = 0$

$$n = 0: \quad s_0 = a_0 \cdot e_0 = a_0 \quad \longrightarrow \quad s_0 = a_0$$

$$n = 1: \quad s_1 = a_0 \cdot e_1 + a_1 \cdot e_0 \quad \longrightarrow \quad s_1 = a_1$$

$$n = 2: \quad s_2 = a_0 \cdot e_2 + a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_0 \quad \longrightarrow \quad s_2 = a_2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$n = i: \quad s_i = a_0 \cdot e_i + a_1 \cdot e_{i-1} + \dots + a_{i-1} \cdot e_1 + a_i \cdot e_0 \quad \longrightarrow \quad s_i = a_i$$

La séquence de pondération $\{a_0, a_1, \dots, a_p\}$ correspond
à la réponse impulsionnelle du filtre non récursif

Les filtres non récursifs (4/5)

Fonction de transfert : A partir de l'équation aux différences :

$$s_n = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e_{n-i} = a_0 \cdot e_n + a_1 \cdot e_{n-1} + \dots + a_p \cdot e_{n-p}$$



Transformée en z

$$S(z) = a_0 E(z) + a_1 z^{-1} E(z) + \dots + a_p z^{-p} E(z)$$

$$\Leftrightarrow S(z) = [a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_p z^{-p}] E(z) = \left(\sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i} \right) E(z)$$

$$\Leftrightarrow F(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i}$$

Réponse en fréquence :

$$F(f) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot e^{-\frac{2j\pi i f}{f_e}}$$

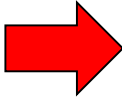
Stabilité :

L'unique pôle de $F(z)$ étant 0, **un filtre non récursif est stable en toutes circonstances**

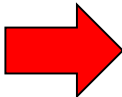
Les filtres non récursifs (5/5)

Synthèse par la méthode des fenêtres connaissant la fonction H(f)

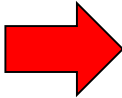
1) Calcul des coefficients $a_i = \frac{1}{f_e} \int_{-\frac{f_e}{2}}^{\frac{f_e}{2}} H(f) \cdot e^{2j\pi \frac{i \cdot f}{f_e}} df$ (i variant de $-\infty$ à $+\infty$)

 $s_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot e_{n-i}$

2) Application d'une fenêtre pour réduire à N coefficients à N (N étant impair)

 $s_n = \sum_{i=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} a_i \cdot e_{n-i}$

3) Translation des coefficients pour rendre le filtre causal

 $s_n = \sum_{i=0}^{N-1} a_i \cdot e_{n-i}$

Conclusion sur les filtres numériques (1/2)

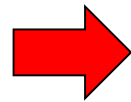
Le choix d'un filtre numérique et la méthode de synthèse dépendent de :

- de l'application
- des contraintes imposées
- des outils de conception disponibles (« filterDesigner » sous Matlab)

Conclusion sur les filtres numériques (2/2)

Si les spécifications du cahier des charges portent sur :

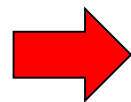
- le module de la réponse en fréquence,
- la largeur de de la bande passante ou de coupure,
- l'atténuation dans la bande de coupure,



filtres récurrents (d'ordre faible)

Si les spécifications du cahier des charges portent sur :

- la phase de la réponse en fréquence,
- des filtres adaptatifs,



filtres non récurrents